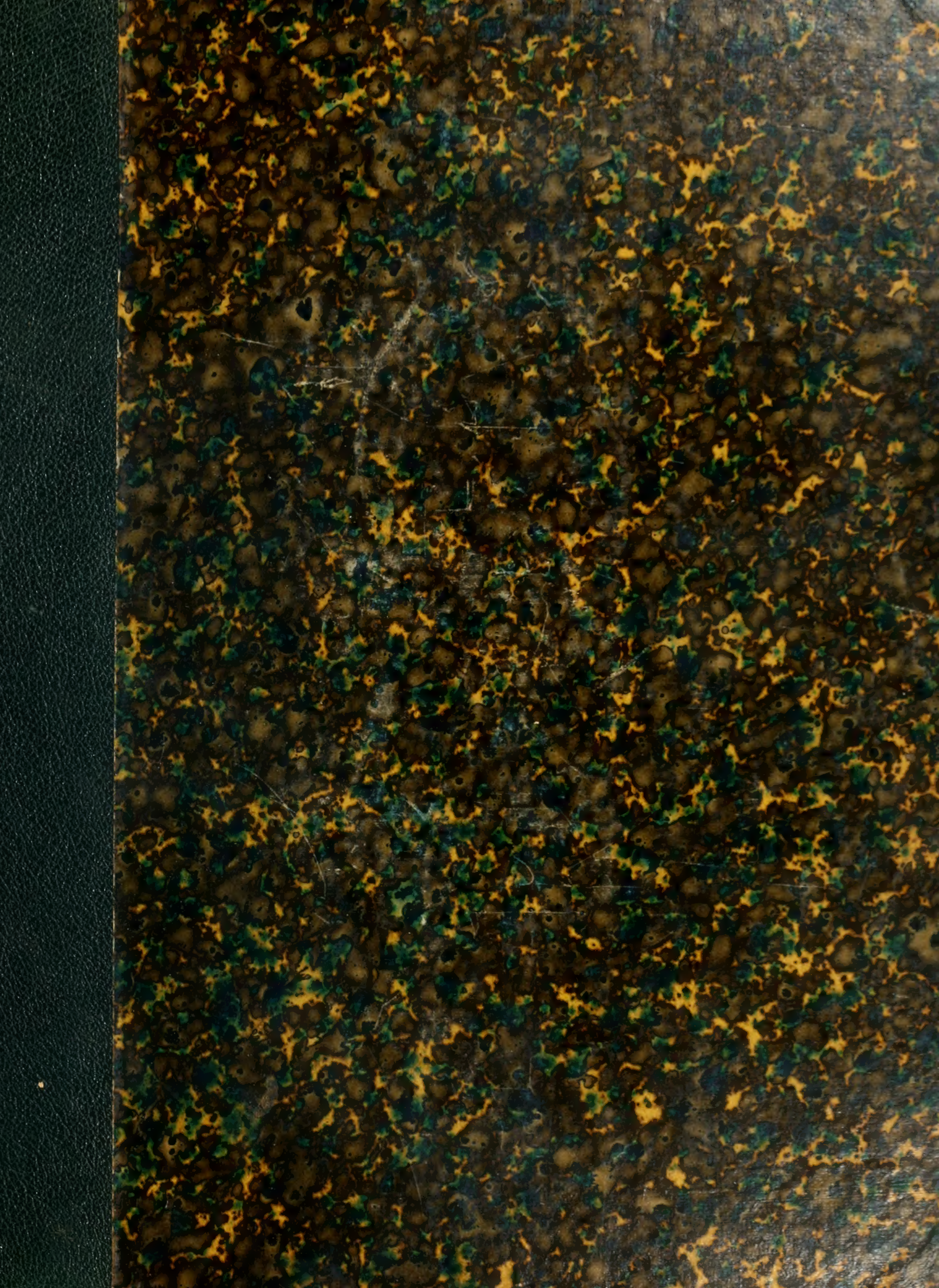






JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
quai des Augustins, 55.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

PROFESSEUR AU COLLÉGE DE FRANCE.

DEUXIÈME SÉRIE. – TOME XIX. – ANNÉE 1874.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, n° 55.

1874

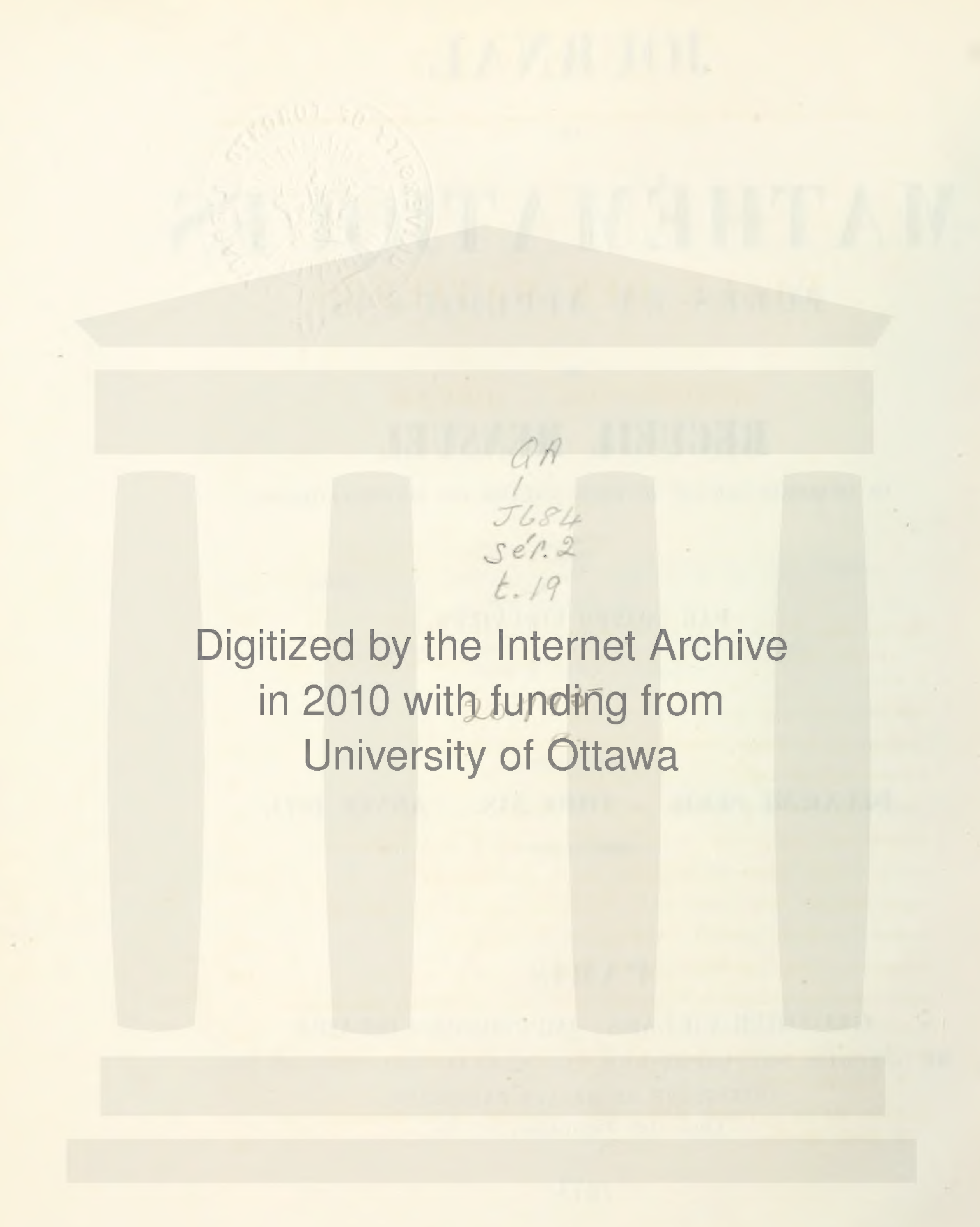


TABLE DES MATIÈRES.

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME XIX.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données;

PAR M. G. DARBOUX.

Dirichlet a le premier démontré d'une manière rigoureuse, dans un célèbre Mémoire inséré au tome XVII du *Journal de Crelle*, que toute fonction continue ou discontinue de deux angles θ et φ, qui est assujettie seulement à ne pas devenir infinie, est toujours développable en une série convergente ordonnée suivant ces fonctions de deux angles que les géomètres désignent sous le nom de *fonctions sphériques* ou *fonctions* Y_n *de Laplace*. Depuis, dans un nouveau travail lu, en 1850, à l'Académie de Berlin, et dont une traduction française a paru au tome II de ce Journal (2e série) [*], il a étendu ses premières recherches en les appliquant à la solution d'un problème très-important dans

[*] DIRICHLET, *Sur une nouvelle formule pour la détermination de la densité d'une couche sphérique infiniment mince quand la valeur du potentiel de cette couche est donnée en chaque point de la surface*, t. II, 2e série, p. 57.

la théorie du potentiel et connu sous le nom de *problème de Gauss*. Je me propose d'établir ici, par une voie nouvelle et plus simple que celle de Dirichlet, les principales propositions de cet illustre géomètre; j'indique même un cas assez étendu, et qui me paraît nouveau, dans lequel on peut développer en série une fonction qui devient infinie pour un ou plusieurs systèmes de valeurs des angles θ, φ. Il m'a suffi, pour obtenir ces résultats, de développer l'analyse que j'ai fait connaître, en 1866, dans mon enseignement, et dont M. Bertrand a bien voulu publier le résumé et les points essentiels dans son *Traité de Calcul intégral*.

Il me semble inutile de reprendre ici la théorie classique, et si souvent exposée, des fonctions Y_n; les lecteurs qui désireront en prendre connaissance pourront consulter soit le premier Mémoire de Dirichlet, soit une Thèse de M. O. Bonnet insérée au tome XVII de ce Journal (1re série), soit l'Ouvrage de M. Bertrand. On sait que, si l'on se propose de développer une fonction en une série ordonnée suivant les fonctions Y_n, les différents termes de la série s'obtiennent par des intégrales définies. Toute la difficulté des deux problèmes distincts traités par Dirichlet dans les Mémoires que nous venons de citer consiste à démontrer la convergence et à déterminer la somme des deux séries suivantes :

$$(A)\quad \sum \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta'\,d\theta'\int_0^{2\pi} f(\theta',\varphi')\,P_n[\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')]\,d\varphi',$$

$$(B)\quad \sum \frac{(2n+1)^2}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta'\,d\theta'\int_0^{2\pi} f(\theta',\varphi')\,P_n[\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')]\,d\varphi'.$$

Dans ces deux séries, le signe P_n indique la fonction X_n de Legendre, dans laquelle on a remplacé l'argument x par

$$\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi').$$

Le terme général de chaque série est donc une fonction des deux angles θ, φ, et il faut prouver que les séries sont convergentes et déterminer leur somme pour des valeurs quelconques de ces angles, la fonction $f(\theta', \varphi')$ étant d'ailleurs entièrement arbitraire et n'étant

assujettie qu'à la seule condition de ne pas devenir infinie dans les limites de l'intégration.

Mais on peut déjà notablement simplifier le problème en ramenant l'examen du cas général où θ, φ ont des valeurs quelconques à celui du cas où $\theta = 0$.

En effet, considérons θ, φ comme les coordonnées polaires d'un point fixe A à la surface d'une sphère de rayon 1; θ', φ' comme les coordonnées polaires d'un autre point M variable de cette sphère. Alors la fonction $f(\theta', \varphi')$ a une valeur déterminée pour chaque point M de la sphère, valeur qu'on peut représenter par $f(M)$. Le produit $\sin\theta' d\theta' d\varphi'$ représente l'élément $d\sigma'$ de la surface de la sphère; enfin l'arc de grand cercle $\widehat{AM}$, qui réunit les deux points A, M, est donné par la formule

$$\cos\widehat{AM} = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi').$$

Les termes généraux de nos deux séries prennent donc les formes suivantes :

$$\frac{2n+1}{4\pi}\int f(M) P_n\left(\cos\widehat{AM}\right) d\sigma', \quad \frac{(2n+1)^2}{4\pi}\int f(M) P_n\left(\cos\widehat{AM}\right) d\sigma',$$

indépendantes de tout système de coordonnées et où l'intégration est étendue à toute la surface de la sphère.

Si maintenant nous revenons au système de coordonnées polaires, mais en prenant pour nouveau pôle le point A, les deux séries (A) et (B) se transformeront dans les suivantes :

$$(A') \qquad \sum \frac{(2n+1)}{4\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} f_1(\theta', \varphi') P_n(\cos\theta') d\varphi',$$

$$(B') \qquad \sum \frac{(2n+1)^2}{4\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} f_1(\theta', \varphi') P_n(\cos\theta') d\varphi',$$

qui ont les mêmes formes que les premières, dans lesquelles on supposerait $\theta = 0$.

Posons enfin

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta', \varphi') d\varphi' = \Phi(\theta').$$

$\Phi(\theta')$ sera la valeur moyenne de la fonction donnée $f(\theta, \varphi)$ sur le cercle décrit du point A comme pôle avec θ' comme rayon, et, si nous effectuons un dernier changement de variables en posant $x = \cos\theta'$, nos deux séries (A'), (B') se transformeront dans les suivantes :

$$(1) \qquad \sum \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} F(x)\, X_n\, dx,$$

$$(2) \qquad \sum \frac{(2n+1)^2}{2}\int_{-1}^{+1} F(x)\, X_n\, dx,$$

$F(x)$ étant ce que devient la fonction $\Phi(\theta')$ quand on y remplace θ' en fonction de x.

Avant d'entrer dans l'examen des séries précédentes, nous rappellerons les formules suivantes, relatives aux fonctions X_n :

$$(3) \qquad (2n+1)X_n = \frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx},$$

$$(4) \qquad X_n = \frac{dX_{n+1}}{dx} + \frac{dX_{n-1}}{dx} - 2x\frac{dX_n}{dx},$$

$$(5) \qquad X_0 + 3X_1 + 5X_2 + \ldots + (2n+1)X_n = \frac{dX_{n+1}}{dx} + \frac{dX_n}{dx}.$$

Ces préliminaires étant admis, nous allons d'abord examiner la série (1), de beaucoup la plus importante.

I.

Désignons par S_{n+1} la somme des $n+1$ premiers termes de cette série. On aura

$$(6) \qquad S_{n+1} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F(x)\,[X_0 + 3X_1 + 5X_2 + \ldots + (2n+1)X_n]\,dx,$$

ou, d'après l'équation (5),

$$(7) \qquad S_{n+1} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F(x)\left(\frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx}\right)dx.$$

Si nous supposons que la fonction $F(x)$ demeure finie et continue pour chaque valeur de x comprise entre -1 et $+1$, on pourra intégrer par parties de la manière suivante :

$$S_{n+1} = \left[\frac{1}{2}F(x)(X_n + X_{n+1})\right]_{-1}^{+1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F'(x)(X_n + X_{n+1})\,dx$$
$$= F(1) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F'(x)(X_n + X_{n+1})\,dx.$$

L'intégrale qui figure dans le second membre tend évidemment vers zéro quand n croît indéfiniment. En effet, pour des valeurs croissantes de n, X_n et X_{n+1} tendent vers zéro pour toute valeur fixe de x comprise entre -1 et $+1$. Chacun des éléments de l'intégrale tend donc vers zéro quand n croît, et l'on a

$$(8) \qquad \lim S_{n+1} = F(1) = \Phi(0).$$

La série est convergente et nous en connaissons la somme; c'est le résultat de Dirichlet.

La démonstration précédente, qui s'appuie sur l'intégration par parties, n'est valable que sous certaines conditions, et, avant de poursuivre ces recherches, nous allons examiner comment on doit la modifier dans le cas où la fonction $\Phi(\theta)$ ou $F(x)$, qui représente la moyenne des valeurs de $f(\theta, \varphi)$ sur des cercles décrits du point A comme pôle, est une fonction continue en général, mais présentant un nombre limité de discontinuités. Dans cette hypothèse, la fonction $F(x)$ deviendra discontinue pour certaines valeurs de x en nombre fini $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_p$, comprises entre -1 et $+1$; mais, dans l'intervalle de ces valeurs, elle demeurera continue et aura une dérivée finie en général, mais qui pourra devenir infinie pour un certain nombre de valeurs de x.

Alors, dans chacun des intervalles de l_h à l_{h+1}, on pourra appliquer l'intégration par parties et l'on aura

$$S_{n+1} = \left[\frac{1}{2}F(x)(X_n + X_{n+1})\right]_{-1}^{l_1} + \left[\frac{1}{2}F(x)(X_n + X_{n+1})\right]_{l_1}^{l_2} + \cdots$$
$$+ \left[\frac{1}{2}F(x)(X_n + X_{n+1})\right]_{l_p}^{1}$$
$$- \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{l_1} + \int_{l_1}^{l_2} + \int_{l_2}^{l_3} + \cdots + \int_{l_p}^{1}\right)F'(x)(X_n + X_{n+1})\,dx.$$

Cela posé, faisons croître n indéfiniment. La partie intégrée de S_n se réduit évidemment à $F(x)$; car les valeurs de X_n, X_{n+1}, pour $l_1, l_2, \ldots, l_p$, tendent vers zéro quand n augmente. La limite est donc la même que s'il n'y avait pas discontinuité.

Quant aux intégrales

$$\frac{1}{2}\int_{l_k}^{l_{k+1}} F'(x)(X_n + X_{n+1})\,dx,$$

qui forment la seconde partie de la formule, chacune d'elles, et par conséquent leur somme, tend vers zéro. Cela est évident si $F'(x)$ ne devient pas infini entre les limites de l'intégration; car les éléments de l'intégrale contiennent $X_n + X_{n+1}$ en facteur et, par conséquent, deviennent tous plus petits que toute quantité donnée quand n augmente indéfiniment.

Si, au contraire, $F'(x)$ devient infini pour une valeur α de x, on pourra isoler de l'intégrale précédente les intégrales singulières

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} F'(x)(X_n + X_{n+1})\,dx, \quad \int_{\alpha-\varepsilon'}^{\alpha} F'(x)(X_n + X_{n+1})\,dx.$$

Elles seront plus petites en valeur absolue (X_n étant plus petit que 1) que

$$F(\alpha + \varepsilon) - F(\alpha), \quad F(\alpha) - F(\alpha - \varepsilon').$$

On pourra donc choisir ε, ε' assez petits pour que ces intégrales soient plus petites, *quel que soit n*, qu'une quantité donnée, et l'on pourra ensuite prendre n assez grand pour rendre ce qui reste de l'intégrale

$$\int_{l_k}^{l_{k+1}} F'(x)(X_n + X_{n+1})\,dx,$$

après qu'on a retranché les deux intégrales singulières, plus petit aussi que toute quantité donnée; donc le cas où $F'(x)$ devient infini ne fait pas difficulté [*].

---

[*] Remarquons toutefois que nous supposons $F'(x)$ toujours de même signe dans le voisinage de α, ce signe pouvant différer pour les valeurs supérieures et pour les valeurs inférieures à α. Si $F'(x)$ devenait infini d'une autre manière, il faudrait employer les méthodes que nous indiquons plus loin pour le cas où $F(x)$ lui-même devient infini.

La démonstration précédente paraît, au premier abord, devoir comprendre moins de cas que celle de Dirichlet. L'illustre géomètre ne fait, en effet, aucune supposition explicite sur l'existence de la dérivée de la fonction que nous avons appelée $F(x)$; mais, si l'on examine attentivement sa démonstration, on verra que Dirichlet considère (*Journal de Crelle*, t. XVII, p. 47) une fonction $\Theta(\psi)$ et qu'il admet l'existence d'une dérivée pour cette fonction. Cette hypothèse nous paraît entraîner des restrictions équivalentes à celles qui forment la base de notre démonstration.

Il resterait à traiter le cas où la fonction qu'il s'agit de développer devient infinie pour un ou plusieurs systèmes de valeurs des variables indépendantes. Nous en réservons l'examen pour la fin de ce travail.

II.

Passons maintenant à l'étude de la série suivante, considérée aussi par Dirichlet dans son premier Mémoire :

$$(C)\qquad \sum \int_0^{\pi} \sin\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} f(\theta', \varphi')\, P_n[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')]\, d\varphi',$$

que l'on ramène, par le changement de variables déjà indiqué, à la forme

$$\sum \int_{-1}^{+1} \varphi(x)\, X_n\, dx.$$

Remarquons d'abord que le terme général de cette série tend vers zéro quand n croît indéfiniment. On pourra donc chercher, au lieu de la limite de la somme S_n des n premiers termes, celle de $\frac{S_n + S_{n+1}}{2}$. Nous aurons à faire usage de cette remarque.

Soit $f(x)$ une nouvelle fonction de x, et posons

$$(9)\qquad \Sigma_n = \int_{-1}^{+1} f(x)\,[X_0 + X_1 + \ldots + X_n].$$

Si nous substituons à la place de $X_0, X_1, \ldots, X_n$ leurs expressions

déduites de la formule (4), nous aurons

$$
\begin{aligned}
X_0 &= \frac{dX_1}{dx} \qquad\qquad - 2x\frac{dX_0}{dx},\\
X_1 &= \frac{dX_2}{dx} + \frac{dX_0}{dx} - 2x\frac{dX_1}{dx},\\
X_2 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
X_n &= \frac{dX_{n+1}}{dx} + \frac{dX_{n-1}}{dx} - 2x\frac{dX_n}{dx},
\end{aligned}
$$

et, par conséquent,

$$
\begin{aligned}
\sum\nolimits_n = \int_{-1}^{+1} f(x)\left(2\frac{dX_1}{dx} + \cdots + 2\frac{dX_{n-1}}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx} + \frac{dX_n}{dx}\right)dx\\
- 2\int_{-1}^{+1} xf(x)\left(\frac{dX_0}{dx} + \frac{dX_1}{dx} + \cdots + \frac{dX_n}{dx}\right)dx,
\end{aligned}
$$

ou, en intégrant par parties,

$$
\begin{aligned}
\sum\nolimits_n = \left[2(1-x)f(x)(X_0+X_1+\ldots+X_n)\right]_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1} f(x)\left(\frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_n}{dx}\right)dx\\
- 2\int_{-1}^{+1}\frac{d}{dx}\left[(1-x)f(x)\right](X_0 + X_1 + \ldots + X_n)\,dx,
\end{aligned}
$$

ou enfin

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{+1}\left[2(1-x)f'(x) - f(x)\right](X_0 + X_1 + \ldots + X_n)\,dx\\
&\quad = \int_{-1}^{+1} f(x)\left(\frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_n}{dx}\right)dx\\
&\qquad + \left[2(1-x)f(x)(X_0 + X_1 + \ldots + X_n)\right]_{-1}^{+1}.
\end{aligned}
\right.
$$

Supposons qu'on ait choisi $f(x)$ de manière à satisfaire à l'équation

$$\varphi(x) = 2(1-x)f'(x) - f(x);$$

on pourra prendre

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\int_{-1}^{x}\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-x}}.$$

en choisissant la limite inférieure de l'intégrale de telle manière que $f(x)$ demeure fini quand $x = -1$. Alors, si $\varphi(x)$ est une fonction continue ou discontinue, demeurant finie ou devenant infinie, *pourvu que son intégrale soit toujours finie*, $f(x)$ sera une fonction toujours finie et continue, et les intégrations par parties que nous venons de faire seront parfaitement légitimes.

Posons

$$(11)\qquad S_n = \int_{-1}^{+1} \varphi(x)(X_0 + X_1 + \ldots + X_n)\,dx;$$

la formule (10) nous donnera

$$(12)\qquad \left\{ \begin{aligned} S_n = & \int_{-1}^{+1} f(x)\left(\frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_n}{dx}\right) dx \\ & + 2\Big[f(x)(1-x)(X_0 + X_1 + \ldots + X_n)\Big]_{-1}^{+1}, \end{aligned} \right.$$

et l'on déduira facilement de cette équation, en y changeant n en $(n-1)$,

$$\frac{S_n + S_{n-1}}{2} = -2f(-1) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\left(\frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx}\right) dx,$$

ou, en tenant compte de la formule (3) et remplaçant $f(-1)$ par sa valeur,

$$\frac{S_{n+1} + S_{n-1}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-x}} - \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x) X_n\,dx.$$

Remarquons que l'intégrale

$$(2n+1)\int_{-1}^{+1} f(x) X_n\,dx$$

est le terme général d'une série considérée dans l'article précédent, et qui est toujours convergente quand $f(x)$ est, comme cela a lieu ici, toujours fini. Le terme général de cette série tend donc vers zéro, et l'on a

$$(13)\qquad \lim S_n = \lim \frac{S_n + S_{n-1}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-x}} = \int_0^{\pi} \varphi(\cos\eta)\cos\frac{\eta}{2}\,d\eta.$$

C'est le résultat obtenu par Dirichlet (*Journal de Crelle*, t. XVII, p. 46

III.

Venons maintenant à la série

$$\sum \int_{-1}^{+1} (2n+1)^2 X_n F(x)\,dx,$$

dont on peut mettre le terme général sous la forme

$$\int_{-1}^{+1} (2n+1) F(x)\,dx \left(\frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx} \right),$$

en vertu de la formule (3), et désignons par S_n la somme des $n+1$ premiers termes de cette série. On aura, après des réductions évidentes,

$$S_n = \int_{-1}^{+1} F(x)\,dx \left[(2n+1)\frac{dX_{n+1}}{dx} + (2n-1)\frac{dX_n}{dx} \right]$$
$$- 4\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx \left(\frac{dX_0}{dx} + \frac{dX_1}{dx} + \cdots + \frac{dX_{n-1}}{dx} \right).$$

En intégrant par parties, on trouve

$$(4)\quad \begin{cases} S_n = \left\{ F(x)\left[(2n+1)X_{n+1} + (2n-1)X_n - 4X_0 - 4X_1 - \ldots - 4X_{n-1} \right] \right\}_{-1}^{+1} \\ \quad + 4\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx\,(X_0 + X_1 + \ldots + X_{n-1}) \\ \quad - \int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx\,\left[(2n+1)X_{n+1} + (2n-1)X_n \right]. \end{cases}$$

Le second membre se compose de trois parties. Pour en trouver la limite, nous ferons cette unique hypothèse : $F'(x)$ satisfait aux conditions, déjà indiquées, qui assurent la convergence de la série

$$\sum (2n+1) \int_{-1}^{+1} X_n F'(x)\,dx.$$

Alors $F(x)$ sera une fonction finie et continue; nos intégrations par

parties seront permises, et, en outre, le terme général de la série précédente tendant vers zéro, il en sera de même des deux intégrales

$$\int nX_n F'(x)\,dx, \quad \int X_n F'(x)\,dx.$$

La troisième partie du second membre de la formule (14) aura donc zéro pour limite. Quant à la seconde, elle sera donnée par la formule (13), et la première s'obtient sans difficulté. On a, en réunissant tous ces résultats,

$$(15) \qquad \lim S_n = 2F(-1) + \frac{4}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{+1} \frac{F'(x)\,dx}{\sqrt{1-x}}.$$

En résumé, nous avons étudié trois séries :

$$(A) \qquad \sum (2n+1) \int\!\!\int f(M)\, P_n(\cos \widehat{AM})\, d\sigma,$$

$$(B) \qquad \sum (2n+1)^2 \int\!\!\int f(M)\, P_n(\cos \widehat{AM})\, d\sigma,$$

$$(C) \qquad \sum \int\!\!\int f(M)\, P_n(\cos \widehat{AM})\, d\sigma,$$

et nous avons obtenu les propositions qu'on peut traduire géométriquement de la manière suivante.

Décrivons du point A comme centre, avec un rayon sphérique égal à γ, un petit cercle de la sphère, et soit $\varphi(\gamma)$ la moyenne des valeurs de la fonction $f(M)$ sur ce cercle :

1° La série (A) est convergente tant que $\varphi(\gamma)$ est une fonction finie et continue pouvant devenir discontinue pour un nombre limité de valeurs de γ, ayant une dérivée qui peut devenir infinie pour une ou plusieurs valeurs de γ. Dans ce cas, la somme de la série est $\Phi(0)$, c'est-à-dire la valeur moyenne de $f(M)$ sur un cercle de rayon infiniment petit décrit autour du point A.

2° La série (B) demeure convergente tant que $\frac{\varphi'(\gamma)}{\sin\gamma}$ demeure fini; la fonction $\varphi(\gamma)$ sera alors nécessairement finie et continue, et la somme de la série sera

$$2\varphi(\pi) - 2\int_0^\pi \frac{\varphi'(\gamma)\,d\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

3° La série (C) est toujours convergente, alors même que la fonction $\varphi(\gamma)$ devient infinie ou discontinue, pourvu que l'intégrale $\int_0^\pi \varphi(\gamma) \cos\frac{\gamma}{2} d\gamma$ conserve toujours une signification précise et demeure finie et continue. La somme de la série (C) est alors

$$\int_0^\pi \varphi(\gamma) \cos\frac{\gamma}{2} d\gamma.$$

Nous nous proposons de compléter ces propositions, à divers points de vue, dans les articles suivants.

IV.

En examinant les séries qui précèdent, nous avons indiqué des conditions qui *suffisent* à assurer la convergence de ces séries, mais qui ne sont pas toutes nécessaires, comme nous allons le voir. Il y aurait donc lieu de se poser d'abord le problème suivant :

Rechercher les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence des trois séries (A), (B), (C).

Sans entrer dans l'examen détaillé de ce problème, nous allons cependant montrer que les séries précédentes peuvent demeurer convergentes quand les fonctions qu'elles doivent développer deviennent infinies. Nous allons étudier surtout la série (A), de beaucoup la plus importante de toutes.

Reprenons la formule (7), qui fait connaître la somme des $n+1$ premiers termes de la série, et qu'on peut écrire, en introduisant $\varphi(\gamma)$ au lieu de $F(x)$,

$$(16) \qquad S_{n+1} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi(\gamma) \frac{d}{d\gamma}[P_n(\cos\gamma) + P_{n+1}(\cos\gamma)] d\gamma.$$

Pour transformer cette expression et en obtenir la limite, nous rappellerons la formule de Laplace, qui donne la valeur approchée de P_n quand n est très-grand,

$$(17) \qquad P_n = \frac{2\cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2n\pi\sin\gamma}} + \frac{l}{n\sqrt{n}}.$$

p étant une fonction inconnue, mais qui demeure inférieure, quel que soit n, à un nombre déterminé quand γ demeure compris entre deux quantités fixes plus grandes que zéro et plus petites que π. Nous ferons usage d'une expression toute semblable pour la dérivée de P_n :

$$(18)\qquad \frac{dP_n}{d\gamma} = \frac{-2\sqrt{n}\sin\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\pi\sin\gamma}} + \frac{p'}{\sqrt{n}}.$$

On déduit de cette dernière équation

$$(19)\qquad \frac{d}{d\gamma}(P_n + P_{n+1}) = \frac{-2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}\sin\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\cot\frac{\gamma}{2}} + \frac{p_1}{n\sqrt{n}},$$

où p_1 est toujours une quantité analogue à p.

Cela posé, revenons à la formule (16) et supposons, pour plus de netteté, que $\varphi(\gamma)$ devienne infini pour une seule valeur a de γ. Décomposons $\varphi(\gamma)$ en deux fonctions

$$\varphi(\gamma) = \varphi_1(\gamma) + \varphi_2(\gamma),$$

en assujettissant cette décomposition aux seules conditions suivantes : 1° $\varphi_2(\gamma)$ ne deviendra pas infini pour $\gamma = a$ ni pour toute autre valeur de γ; 2° $\varphi_1(\gamma)$ sera nul en dehors de l'intervalle de $(a - h')$ à $(a + h)$ comprenant l'infini a. Ces conditions laissent subsister une grande indétermination; on choisira, dans chaque cas particulier, la décomposition qui paraîtra la plus avantageuse ou celle qui s'offrira naturellement. Remarquons que l'on a, en vertu des conditions posées,

$$\varphi_2(0) = \varphi(0).$$

Ces points étant admis, l'intégrale (16) peut se décomposer en deux parties

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\varphi_1(\gamma)\frac{d}{d\gamma}(P_n + P_{n+1})\,d\gamma = \frac{1}{2}\int_{a-h'}^{a+h}\varphi_1(\gamma)\frac{d}{d\gamma}(P_n + P_{n+1})\,d\gamma$$

et

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\varphi_2(\gamma)\frac{d}{d\gamma}(P_n + P_{n+1})\,d\gamma.$$

Cette deuxième intégrale, où $\varphi_2(\gamma)$ demeure toujours fini, tend, d'après les résultats acquis, vers la valeur $\varphi_2(0)$ ou $\varphi(0)$. Tout dépend donc de l'examen de la première

$$(20)\qquad \frac{1}{2}\int_{a-h}^{a+h'} \varphi_1(\gamma)\,\frac{d(P_n + P_{n+1})}{d\gamma}\,d\gamma,$$

et de là résulte déjà une proposition remarquable :

Quand la fonction $\varphi(\gamma)$ devient infinie dans les limites considérées, la convergence de la série (A) ne dépend que de la manière dont varie la fonction dans le voisinage immédiat des valeurs de γ pour lesquelles elle devient infinie.

En appliquant maintenant la formule (19), nous voyons que l'intégrale (20), dont nous cherchons la limite, se décompose en deux parties

$$-\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{a-h}^{a+h'} \frac{\varphi(\gamma)\sin\left(n\gamma+\frac{\gamma}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\operatorname{tang}\gamma}}\,d\gamma \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{a-h}^{a+h'} p_1\varphi_1(\gamma)\,d\gamma.$$

La seconde partie peut être rendue infiniment petite quand n croît indéfiniment. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante, en étendant nos raisonnements au cas où il y a plusieurs infinis :

La série (A) ne sera convergente et n'aura pour somme $\varphi(0)$ que si les intégrales

$$(21)\qquad \sqrt{n}\int_{a-h}^{a+h'} \frac{\varphi(\gamma)\sin\left(n\gamma+\frac{\gamma}{2}-\frac{\pi}{4}\right)d\gamma}{\sqrt{\operatorname{tang}\gamma}},$$

relatives à chaque infini, ont une somme qui tende vers zéro quand n croît indéfiniment, h et h' étant fixes, mais aussi petits qu'on le veut.

Appliquons cette règle au cas, très-étendu et très-important, où, dans le voisinage de a, on peut mettre $\varphi(\gamma)$ sous la forme

$$\varphi(\gamma) = \frac{A}{(\gamma-a)^p} + \psi_1(\gamma),$$

où p est, bien entendu, plus petit que 1. A, est une constante et $\psi_1(\gamma)$

désigne une fonction toujours finie. De cette équation on déduit facilement la suivante :

$$(22)\qquad \frac{\varphi(\gamma)}{\sqrt{\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}}} = \frac{A}{(\gamma - a)^p} + \psi(\gamma),$$

où A et ψ ont la même définition que A_1 et ψ_1. On pourra donc poser, dans l'intervalle de $a - h'$ à $a + h$,

$$\varphi_1(\gamma) = \frac{A\sqrt{\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}}}{(\gamma - a)^p},$$

et l'intégrale (21) sera ramenée à la forme

$$A\sqrt{n}\int_{a-h'}^{a+h} \frac{\sin\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{(\gamma - a)^p}\,d\gamma.$$

On peut même supposer, pour plus de généralité, que la formule (22) convienne seulement pour les valeurs de γ supérieures à a, et qu'une autre formule semblable doive être employée pour les valeurs de γ inférieures à a. Alors on aura à rechercher la valeur limite lorsque n grandit de deux expressions telles que

$$A\sqrt{n}\int_{a}^{a+h} \frac{\sin\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)d\gamma}{(\gamma - a)^p}, \quad B\sqrt{n}\int_{a-h'}^{a} \frac{\sin\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)d\gamma}{(\gamma - a)^p}.$$

Il suffira de considérer la première; on peut évidemment y remplacer $\sqrt{n}$ par $\sqrt{n + \frac{1}{2}}$, puis $n + \frac{1}{2}$ par n, et l'on est ramené à chercher la limite de

$$\sqrt{n}\int_{a}^{a+h} \frac{\sin\left(n\gamma - \frac{\pi}{4}\right)d\gamma}{(\gamma - a)^p},$$

ou, en posant $n\gamma - na = u$,

$$(25)\quad n^{p}\cos\left(na-\frac{\pi}{4}\right)\int_{-na}^{n(\pi-a)}\frac{\sin u\,du}{u^{p}} + n^{p}\sin\left(na-\frac{\pi}{4}\right)\int_{-na}^{n(\pi-a)}\frac{\cos u\,du}{u^{p}}.$$

Lorsque n croît indéfiniment, les deux intégrales qui figurent dans l'expression précédente tendent vers les valeurs limites

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos u\,du}{u^{p}} = \Gamma(1-p)\cos(1-p)\frac{\pi}{2},\quad \int_{0}^{\infty}\frac{\sin u\,du}{u^{p}} = \Gamma(1-p)\sin(1-p)\frac{\pi}{2}.$$

On voit donc :

1° Que si $p > \frac{1}{2}$, l'expression (25) croît sans limite;

2° Que si $p < \frac{1}{2}$, la limite de cette expression est zéro;

3° Que si $p = \frac{1}{2}$, l'expression, sans augmenter indéfiniment, n'a aucune limite déterminée.

Donc *on pourra développer la fonction $f(\theta, \psi)$ en une série de fonctions Y_n tant que la fonction $\varphi(\gamma)$, déduite de la précédente, ne deviendra pas infiniment grande d'un ordre supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$* (*).

Cette proposition est confirmée dans les exemples particuliers étudiés par Poisson et Dirichlet.

Dirichlet n'a pas étudié au point de vue précédent la série (A), mais il a donné au sujet de la série (B), qui était l'objet principal de son deuxième Mémoire, une règle à laquelle on sera conduit en adoptant la marche suivante.

Nous avons vu que la série (B) sera convergente toutes les fois que la fonction $F'(x) = \frac{\varphi'(\gamma)}{\sin\gamma}$ est telle, que la série

$$\sum\int_{-1}^{+1} X_n F'(x)\,dx \quad \text{ou} \quad \sum\int_{0}^{\pi} P_n\varphi'(\gamma)\,d\gamma$$

soit convergente. Il suffira donc d'appliquer à la fonction $F'(x)$ les résultats que nous avons obtenus pour la série (A).

(*) La valeur $p = \frac{1}{2}$ est, on le voit, une *limite précise* qui sépare les cas pour lesquels le développement est possible de ceux dans lesquels la série serait divergente.

V

Les trois séries que nous avons examinées sont des cas particuliers de la suivante :

$$\sum (2n+1)^\alpha \int\!\!\int f(\mathrm{M})\, \mathrm{P}_n(\cos \widehat{\mathrm{AM}})\, d\sigma,$$

où α est un nombre entier positif quelconque. En donnant à α les valeurs 0, 1, 2, on retrouve les séries (C), (A), (B), qui font l'objet de ce travail. Je me propose de montrer, en le terminant, que les méthodes précédentes peuvent être appliquées pour des valeurs quelconques de α. Je prendrai comme exemple le cas où $\alpha = 3$; les autres se traiteraient de la même manière.

Supposons, pour plus de simplicité, que la fonction $\mathrm{F}(x)$, déjà définie et qui est la moyenne des valeurs de $f(\mathrm{M})$ sur un cercle, ait sa dérivée seconde finie pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$. Alors les séries ayant pour termes généraux les intégrales

$$\int \mathrm{F}''(x)\, \mathrm{X}_n\, dx, \quad n\int \mathrm{F}'(x)\, \mathrm{X}_n\, dx, \quad n^2 \int \mathrm{F}(x)\, \mathrm{X}_n\, dx$$

seront convergentes, et ces trois intégrales tendront, par conséquent, vers zéro quand n croîtra indéfiniment.

On peut, en vertu de la formule (3), écrire le terme général de notre série

$$(2n+1)^2 \int_{-1}^{+1} \mathrm{F}(x) \left(\frac{d\mathrm{X}_{n+1}}{dx} - \frac{d\mathrm{X}_{n-1}}{dx} \right),$$

et, par suite, si l'on désigne par S_n la somme des $n+1$ premiers termes, on aura, après quelques réductions,

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_n = & \int_{-1}^{+1} \mathrm{F}(x)\, dx \left[(2n+1)^2 \frac{d\mathrm{X}_{n+1}}{dx} + (2n-1)^2 \frac{d\mathrm{X}_n}{dx} \right] \\ & - 8 \int_{-1}^{+1} \mathrm{F}(x)\, dx \left[(2n-1) \frac{d\mathrm{X}_{n-1}}{dx} + (2n-3) \frac{d\mathrm{X}_{n-2}}{dx} + \ldots \right]. \end{aligned}$$

Intégrons par parties, nous trouverons

$$\begin{aligned} S = \Big\{ F(x) \Big[(2n+1)^2 \frac{dX_{n+1}}{dx} - (2n-1)^2 \frac{dX_n}{dx} \\ - 8(2n-1) \frac{dX_{n-1}}{dx} - 8(2n-3) \frac{dX_{n-2}}{dx} - \ldots \Big] \Big\}_{-1}^{+1} \\ - \int_{-1}^{+1} F''(x)\,dx \left[(2n+1)^2 X_{n+1} + (2n-1)^2 X_n \right] \\ - 16 \int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx\,(X_n + X_{n-1} + \ldots) \\ - 8 \int_{-1}^{+1} F(x)\,dx \left[(2n-1) X_n + \ldots \right] \end{aligned}$$

La première intégrale qui figure dans cette formule tend vers zéro, d'après les remarques faites plus haut, quand n croît indéfiniment. Les deux derniers termes ont déjà été calculés, et le premier se trouve sans difficulté. On saura donc obtenir la somme de la série proposée.

Il resterait à démontrer l'expression approchée que nous avons admise pour $\frac{dP}{dq}$: je pourrai revenir sur cette question dans un autre article.

SUR LES QUADRATURES;

PAR M. P. TCHEBICHEF.

(Lu au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, à Lyon.)

1. Dans l'Ouvrage très-important que M. Hermite vient de publier sur l'Analyse mathématique, l'illustre géomètre donne une nouvelle formule pour évaluer approximativement la valeur de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Dans cette formule, toutes les valeurs de la fonction $\varphi(x)$ entrent avec un même coefficient; c'est ce qui apporte une différence essentielle entre la formule de M. Hermite et celle de Gauss, et ce qui en rend très-commode l'application numérique. L'utilité des formules approximatives de ce genre m'engage à présenter quelques réflexions sur la recherche de ces formules.

Nous supposerons que, la fonction $F(x)$ étant donnée, on cherche à exprimer le plus près possible les intégrales de la forme

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\varphi(x)\,dx,$$

quelle que soit la fonction $\varphi(x)$, par la formule

$$k[\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)],$$

où k, x_1, x_2, ..., x_n sont des valeurs indépendantes de la fonction $\varphi(x)$. Comme cette formule ne contient que $n+1$ quantités k, x_1, x_2, ..., x_n

dont on puisse disposer, il est impossible de l'identifier avec la valeur de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} F(x)\varphi(x)\,dx$ au delà des termes qui contiennent les n premières dérivées de la fonction $\varphi(x)$, et, par conséquent, on aura

$$(1)\quad \begin{cases} \int_{-1}^{+1} F(x)\varphi(x)\,dx - k[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)] \\ \qquad = k_1\varphi^{(n+1)}(0) + k_2\varphi^{(n+2)}\varphi(0) + \ldots, \end{cases}$$

en désignant par $k_1, k_2, \ldots$ les coefficients de $\varphi^{(n+1)}(0)$, $\varphi^{(n+2)}(0), \ldots$ dans l'expression de la différence

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\varphi(x)\,dx - k[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)],$$

que l'on trouve en développant, d'après la formule de Maclaurin, la fonction $\varphi(x)$ sous le signe de l'intégrale et les valeurs $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)$ qui sont hors ce signe.

2. Pour trouver, d'après la formule (1), tant qu'elle est possible, la valeur du coefficient k et les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la variable x, nous remarquons que cette formule, dans le cas particulier de

$$\varphi(x) = \frac{1}{z-x},$$

z étant une quantité quelconque, se réduit à l'égalité

$$\int_{-1}^{+1} \frac{F(x)}{z-x}\,dx - k\left[\frac{1}{z-x_1} + \frac{1}{z-x_2} + \cdots + \frac{1}{z-x_n}\right]$$
$$= 1.2.3\ldots(n+1)k_1 z^{-n-2} + 1.2.3\ldots(n+2)k_2 z^{-n-3} + \ldots,$$

où $k, k_1, k_2, \ldots, x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des valeurs indépendantes de z. D'autre part, en dénotant par $f(z)$ le produit

$$(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n),$$

on a

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-x_1} + \frac{1}{z-x_2} + \ldots + \frac{1}{z-x_n}.$$

et, par suite, la formule précédente se réduit à celle-ci :

$$(2)\qquad \int_{-1}^{+1} \frac{F(x)}{z-x}\,dx = k\frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{1.2.3\ldots(n+1)k_1}{z^{n+2}} + \frac{1.2.3\ldots(n+2)k_2}{z^{n+3}} + \ldots$$

En multipliant cette formule par z et en remarquant que, pour $z = \infty$, les valeurs

$$z\int_{-1}^{+1} \frac{F(x)}{z-x}\,dx = \int_{-1}^{+1} \frac{F(x)}{1-\frac{x}{z}}\,dx,$$

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1}{1-\frac{x_1}{z}} + \frac{1}{1-\frac{x_2}{z}} + \cdots + \frac{1}{1-\frac{x_n}{z}},$$

$$\frac{1.2.3\ldots(n+1)k_1}{z^{n+1}},\quad \frac{1.2.3\ldots(n+2)k_2}{z^{n+2}},\ldots$$

sont respectivement égales à

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx,\quad n,\quad 0,\quad 0,\ldots,$$

on parvient à cette égalité

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx = nk,$$

ce qui nous donne, pour la détermination du coefficient k, la formule suivante :

$$k = \frac{1}{n}\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx.$$

3. Pour déterminer la fonction

$$f(z) = (z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n),$$

nous remarquons que la formule (2), étant intégrée par rapport à z, nous donne

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)\,dx = k\log\frac{f(z)}{C} - \frac{1.2.3\ldots nk_1}{z^{n+1}} - \frac{1.2.3\ldots(n+1)k_2}{z^{n+2}} - \ldots$$

où C est une constante, et de là

$$f(z)\,e^{\text{[illegible]}} = Ce^{k\int \text{[illegible]}}$$

Comme la fonction cherchée

$$f(z) = (z - x_1)(z - x_2)\dots(z - x_n)$$

est de degré n et que l'expression

$$e^{\text{[illegible]}}$$

ne diffère de 1 que par les puissances de z inférieures à z^{-n}, il est clair que la partie entière du premier membre de la formule trouvée est égale à la fonction $f(z)$, et, par conséquent, on aura

$$f(z) = \mathrm{E}\,Ce^{k\int \text{[illegible]}}$$

ou

(3) $$f(z) = C\mathrm{E}e^{k\int \text{[illegible]}}.$$

en désignant par E la partie entière de la fonction mise sous ce signe. Dans cette formule, la valeur de la constante k, comme nous l'avons vu, est donnée par l'équation

(4) $$k = \frac{1}{n}\int_{-1}^{+1} \mathrm{F}(x)\,dx.$$

Quant à la constante C, on trouvera aisément sa valeur en remarquant que le coefficient de z^n, dans la fonction cherchée, est égal à 1; mais nous n'insisterons pas sur la recherche de la valeur de cette constante, vu qu'elle peut être toujours supprimée sans modifier l'équation

$$f(z) = C\mathrm{E}e^{k\int_{-1} \text{[illegible]}} = 0,$$

dont les racines présentent les valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans la for-

mule en question

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\varphi(x)\,dx = k[\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)].$$

4. Passant aux applications, nous ferons d'abord

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

ce qui est le cas de M. Hermite, et où l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\varphi(x)\,dx$$

se réduit à

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Pour cette valeur de $F(x)$, on trouve

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi,$$

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)\,dx = \int_{-1}^{+1} \frac{\log(z-x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi \log\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2};$$

donc, d'après (4),

$$k = \frac{\pi}{n},$$

et, d'après (3), l'équation $f(z) = 0$, qui détermine les valeurs de x_1, $x_2, \ldots, x_n$, se réduit à

$$\mathrm{E}e^{n\log\frac{z+\sqrt{1-z^2}}{2}} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{E}\left(\frac{z-\sqrt{1-z^2}}{2}\right)^n = 0,$$

résultat identique avec celui de M. Hermite, vu que la partie entière de la fonction $\left(\frac{z+\sqrt{1-z^2}}{2}\right)^n$ est égale à

$$\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos x).$$

5. Pour montrer une autre application des formules que nous venons de donner, nous poserons maintenant

$$F(x) = 1,$$

ce qui est le cas où l'intégrale $\int [illegible] F(x)\varphi(x)\,dx$ se réduit à

$$\int [illegible] \varphi(x)\,dx,$$

intégrale pour laquelle Gauss a donné sa formule de quadrature. Comme on trouve

$$\int [illegible] dx = [illegible], \quad \int [illegible] \log(z - x)\,dx = \log [illegible] - 2,$$

on conclut, d'après le n° 3, que la valeur approchée de l'intégrale $\int [illegible] \varphi(x)\,dx$ sera donnée par la formule

$$k[\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)],$$

quand on fait $k = \frac{[illegible]}{n}$, et que l'on prend pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines de l'équation

$$[illegible] \quad \text{ou} \quad [illegible] = 0,$$

équation qu'on peut mettre, par le développement en séries, sous la forme suivante :

(5) $$E z^n e^{[illegible]} = 0.$$

6. En donnant à n les valeurs les plus simples, telles que

$$n = 2, 3, 4, 5, 6, 7,$$

on trouve que, pour ces valeurs de n, l'équation (5) devient respecti-

vement

$$z^2 - \frac{1}{3} = 0,$$

$$z^3 - \frac{1}{2}z = 0,$$

$$z^4 - \frac{2}{3}z^2 + \frac{1}{45} = 0,$$

$$z^5 - \frac{5}{6}z^3 + \frac{7}{72}z = 0,$$

$$z^6 - z^4 + \frac{1}{5}z^2 - \frac{1}{135} = 0,$$

$$z^7 - \frac{7}{6}z^5 + \frac{119}{360}z^3 - \frac{149}{6480}z = 0,$$

et, en résolvant ces équations, on obtient les systèmes suivants des valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$n = 2.$

$$x_1 = -0{,}816479,$$
$$x_2 = +0{,}816479;$$

$n = 3.$

$$x_1 = -0{,}707166,$$
$$x_2 = 0,$$
$$x_3 = +0{,}707166;$$

$n = 4.$

$$x_1 = -0{,}794622,$$
$$x_2 = -0{,}187597,$$
$$x_3 = +0{,}187597,$$
$$x_4 = 0{,}794622;$$

$n = 5.$

$$x_1 = -0{,}832437,$$
$$x_2 = -0{,}374542,$$
$$x_3 = 0,$$
$$x_4 = +0{,}374542,$$
$$x_5 = +0{,}832437;$$

$n = 6.$

$$x_1 = -0,866249,$$
$$x_2 = -0,422540,$$
$$x_3 = -0,266603,$$
$$x_4 = +0,266603,$$
$$x_5 = +0,422540,$$
$$x_6 = +0,866249;$$

$n = 7.$

$$x_1 = -0,883854,$$
$$x_2 = -0,529706,$$
$$x_3 = -0,323850,$$
$$x_4 = 0,$$
$$x_5 = +0,323850,$$
$$x_6 = +0,529706,$$
$$x_7 = +0,883854.$$

Avec ces valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la formule

$$\frac{2}{n}[\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)]$$

donne l'expression approximative de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx$, qui, dans certains cas, est plus commode pour les applications que ne l'est celle de Gauss; car, dans cette dernière formule, les valeurs $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)$ entrent avec des coefficients différents. Comme notre expression de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx$ n'est exacte que jusqu'aux termes en $\varphi^{(n+1)}(0)$, $\varphi^{(n+2)}(0), \ldots$, on devra y prendre, en général, plus de termes que dans la formule de Gauss. Néanmoins, dans le cas où les valeurs de $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)$, d'après lesquelles on détermine l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx$, sont affectées d'erreurs inconnues, notablement plus grandes que celle qui résulte des termes rejetés, la formule

approchée que nous venons de trouver doit être préférée à celle de Gauss même par rapport au degré de précision, vu que, dans cette formule approchée, la somme des carrés de coefficients, à cause de leur égalité, a la plus petite valeur possible.

7. Revenant au cas résolu par M. Hermite, nous remarquons que l'intégrale $\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$, pour $x=\cos\theta$, se réduit à $\int_0^\pi\varphi(\cos\theta)\,d\theta$; donc la formule donnée par lui peut avoir des applications très-utiles dans la recherche des valeurs approchées du premier terme du développement de $\varphi(\cos\theta)$ en série

$$A_0 + A_1\cos\theta + A_2\cos 2\theta + \dots.$$

Pour trouver une expression pareille du coefficient A_1, on devrait faire, dans les formules du n° 5,

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Or, pour cette valeur de $F(x)$, l'intégrale $\int_{-1}^{+1}F(x)dx$, qui entre dans les formules du n° 5, se réduit à zéro, ce qui fait voir clairement que, pour le cas en question, ces formules ne sont pas applicables. Nous allons montrer le parti qu'on peut cependant tirer, dans ce cas, de la méthode exposée plus haut.

En remplaçant, dans l'intégrale $\int_{-1}^{+1}F(x)\varphi(x)dx$, la fonction $\varphi(x)$ par son développement en série

$$\varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1}x + \frac{\varphi''(0)}{1.2}x^2 + \frac{\varphi'''(0)}{1.2.3}x^3 + \dots,$$

le terme du résultat qui contient $\varphi(0)$ s'annule toutes les fois que l'intégrale $\int_{-1}^{+1}F(x)dx$ est égale à zéro; mais il n'en est plus ainsi, évidemment, de son expression sous la forme

$$k[\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \dots + \varphi(x_n)],$$

à moins qu'on ne prenne, dans cette formule, la moitié des termes avec le signe $-$. Nous allons donc chercher à exprimer la valeur approchée de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} F(x)\varphi(x)\,dx$, dans la supposition de $\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx$, par la formule

$$k[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_m)-\varphi(x_{m+1})-\varphi(x_{m+2})-\ldots-\varphi(x_{2m})],$$

où il y a m termes avec le signe $+$ et m termes avec le signe $-$.

8. Comme, dans la formule

$$k[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_m)-\varphi(x_{m+1})-\varphi(x_{m+2})-\ldots-\varphi(x_{2m})],$$

il y a $2m+1$ valeurs, savoir : $k, x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{2m}$ dont on peut disposer, et que, par sa composition, le terme en $\varphi(0)$ s'annule, on peut identifier cette formule avec l'intégrale $\int_{-1}^{+1} F(x)\varphi(x)\,dx$ jusqu'aux termes qui contiennent les $2m+1$ premières dérivées de $\varphi(x)$, ce qui nous donne l'équation

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} F(x)\varphi(x) = k[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots\\ +\varphi(x_m)-\varphi(x_{m+1})-\varphi(x_{m+2})-\ldots-\varphi(x_{2m})]\\ +k_1\varphi^{2m+2}(0)+k_2\varphi^{2m+3}(0)+\ldots.\end{aligned}$$

En suivant la même marche que dans les nos **2**, **3**, nous trouverons, d'après cette équation, les valeurs des quantités $k, x_1, x_2, \ldots, x_{2m}$. En effet, posant

$$\varphi(x)=\frac{1}{z-x},$$

l'équation précédente se réduit à celle-ci :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1}\frac{F(x)}{z-x}\,dx = k\Big(\frac{1}{z-x_1}+\frac{1}{z-x_2}+\ldots\\ +\frac{1}{z-x_m}-\frac{1}{z-x_{m+1}}-\frac{1}{z-x_{m+2}}-\ldots-\frac{1}{z-x_{2m}}\Big)\\ -\frac{1\cdot 3\ldots(2m-2)k}{z}+\frac{1\cdot 3\ldots(2m-3)k}{z^{2\ldots}}+\ldots\end{aligned}$$

Faisant ensuite

$$f_0(z) = (z - x_1)(z - x_2)\ldots(z - x_m),$$
$$f_1(z) = (z - x_{m+1})(z - x_{m+2})\ldots(z - x_{2m}),$$

et remarquant que, pour ces valeurs de $f_0(z)$, $f_1(z)$, on a

$$\frac{f_0'(z)}{f_0(z)} = \frac{1}{z - x_1} + \frac{1}{z - x_2} + \cdots + \frac{1}{z - x_m},$$
$$\frac{f_1'(z)}{f_1(z)} = \frac{1}{z - x_{m+1}} + \frac{1}{z - x_{m+2}} + \cdots + \frac{1}{z - x_{2m}},$$

on peut mettre l'équation sous la forme suivante :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{F(x)}{z - x}\,dx = k\left[\frac{f_0'(z)}{f_0(z)} - \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}\right] + \frac{1.2.3\ldots(2m+1)k_1}{z^{2m+2}} + \frac{1.2.3\ldots(2m+3)k_2}{z^{2m+4}} + \ldots,$$

d'où, en intégrant par rapport à z, on tire

$$\int_{-1}^{+1} F(x) \log(z - x)\,dx = k \log\frac{f_0(z)}{f_1(z)} - \frac{1.2.3\ldots 2m \ldots k_1}{z^{2m+1}} - \frac{1.2.3\ldots(2m+2)k_2}{z^{2m+3}} + \ldots$$

La constante introduite par l'intégration se réduit à zéro, vu que tous les termes s'annulent pour $z = \infty$.

D'après cette équation et en faisant, pour abréger,

$$\frac{1.2.3\ldots 2m\ldots k_1}{k} = L_1, \quad \frac{1.2.3\ldots(2m+2)k_2}{k} = L_2, \ldots,$$

on trouve

$$\frac{f_0(z)}{f_1(z)}\, e^{L_1 z^{-2m-1} + L_2 z^{\ldots} + \ldots} = e^{\frac{1}{k}\int [illegible]}.$$

Les fonctions $f_0(z)$, $f_1(z)$ étant de même degré, la fraction $\frac{f_0(z)}{f_1(z)}$ est du degré zéro; de plus, l'expression $e^{[illegible]}$ ne diffère de 1 que par les puissances de z inférieures à z^{-2m-1}; par conséquent, l'équation trouvée nous montre que la fraction $\frac{f_0(z)}{f_1(z)}$ ne diffère de l'ex-

pression $e^{k\int_{-1}^{+1}F(x)\log(z-x)dx}$ que par les termes qui renferment les puissances de z moins élevées que z^{-2m-1} et, par suite, moins élevées que le degré de la fraction $\frac{1}{z(f_1(z))^2}$; car la fonction $f_1(z)$, comme nous l'avons vu, n'est que du degré m; mais, on le sait, la fraction $\frac{f_0(z)}{f_1(z)}$ ne peut donner une valeur approchée d'une fonction quelconque exacte jusqu'à l'ordre de $\frac{1}{z(f_1(z))^2}$, à moins qu'elle ne soit l'une des fractions convergentes qu'on trouve par le développement en fraction continue, et que le quotient complet, correspondant à cette fraction convergente, ne soit dépourvu du terme en $\frac{1}{z}$. En partant de là, il est aisé de trouver et la constante k et les fonctions $f_0(z)$, $f_1(z)$, qui déterminent les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{2m}$. A cet effet, on développera l'expression $e^{k\int_{-1}^{+1}F(x)\log(z-x)dx}$ en fraction continue, en s'arrêtant au quotient qui correspond à une fraction convergente dont les termes sont du degré m. Égalant à zéro le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans l'expression complète de ce quotient, on aura l'équation qui déterminera la valeur de la constante k, et, en mettant la valeur de k, ainsi déterminée, dans deux termes de la fraction convergente, on aura les fonctions cherchées $f_0(z)$, $f_1(z)$.

9. Pour montrer, sur un exemple, l'usage de ce que nous venons d'exposer, supposons qu'il s'agisse de trouver l'expression approximative de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} x\varphi(x)dx$. Pour cela on posera, dans les formules du numéro précédent,

$$F(x) = x.$$

Pour cette valeur de $F(x)$, on obtient

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)\,dx = \int_{-1}^{+1} x\log(z-x)\,dx = \frac{z^2-1}{2}\log\frac{z+1}{z-1} - z,$$

[illegible]

En développant la dernière expression en fraction continue, on trouve que le quotient complet, correspondant à une fraction convergente dont les termes sont du premier degré, est égal à

$$3kz + \left(\frac{3}{5}k - \frac{1}{9k}\right)\frac{1}{z} + \cdots,$$

et que cette fraction est égale à

$$\frac{3kz - 1}{3kz + 1};$$

d'où nous concluons que, dans l'expression approximative de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} x\varphi(x)\,dx$ par la formule $k[\varphi(x_1) - \varphi(x_2)]$, on doit prendre, pour k, une racine de l'équation

$$\frac{3}{5}k - \frac{1}{9k} = 0,$$

et, pour x_1, x_2 respectivement, les racines des équations

$$3kz - 1 = 0, \quad 3kz + 1 = 0.$$

On trouve ainsi deux valeurs de k :

$$k = +\sqrt{\frac{5}{27}}, \quad k = -\sqrt{\frac{5}{27}},$$

et deux systèmes des valeurs de x_1, x_2 :

$$x_1 = +\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{3}{5}},$$
$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_2 = +\sqrt{\frac{3}{5}};$$

mais, de ces doubles valeurs de k, x_1, x_2, il ne résulte évidemment qu'une seule valeur de l'expression cherchée, savoir :

$$\sqrt{\frac{5}{27}}\left[\varphi\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) - \varphi\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right].$$

Pour trouver une expression approximative à quatre termes de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx$, on prendra le quotient de la même fraction continue qui correspond à la fraction convergente dont les termes sont du second degré. Comme la valeur complète de ce quotient s'exprime par la série

$$\varphi(kz) = \frac{5832k^4 - 12163k^2 - 350}{243k^2 - 15}\,\frac{1}{z} \cdots$$

et qu'il correspond à la fraction convergente

$$\frac{270k^2z^2 - 90kz + 10 - 54k^2}{270k^2z^2 + 90kz + 10 - 54k^2},$$

on trouvera les valeurs de la constante k et de x_1, x_2, x_3, x_4 par les équations

$$5832k^4 - 12163k^2 - 350 = 0,$$

$$270k^2z^2 - 90kz + 10 - 54k^2 = 0,$$

$$270k^2z^2 + 90kz + 10 - 54k^2 = 0.$$

En les résolvant, on parvient à cette expression approximative de l'intégrale en question

$$0,41621[\varphi(0,78326) + \varphi(0,01762) + \varphi(-0,01762) + \varphi(-0,78326)].$$

10. En passant à la recherche des expressions approximatives de l'intégrale $\int_0^\pi \cos\theta\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta$ ou $\int_{-1}^{+1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\varphi(x)\,dx$, nous poserons, dans nos formules,

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pour cette valeur de $F(x)$, on obtient

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)\,dx = \int_{-1}^{+1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\log(z-x)\,dx = -\pi(z-\sqrt{z^2-1}),$$

$$e^{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)\,dx} = e^{-(z-\sqrt{z^2-1})}.$$

Développant la dernière expression en fraction continue, on trouve les fractions convergentes

$$\frac{4kz-\pi}{4kz+\pi},\quad \frac{48k^2z^2-12k\pi z+\pi^2-12k^2}{48k^2z^2+12k\pi z+\pi^2-12k^2},\ \ldots,$$

qui correspondent aux quotients complets

$$4kz+\pi-\frac{12k^2-\pi^2}{12k}\frac{1}{z}+\ldots,\quad 12kz-\frac{144k^4-60\pi^2k^2+\pi^4}{12k(12k^2-\pi^2)}\frac{1}{z}+\ldots,$$

d'où, d'après le n° **8** : 1°, pour la détermination de k, x_1, x_2 dans l'expression approximative de l'intégrale $\int_0^{\pi}\cos\theta\,\varphi(\cos\theta)d\theta$ par la formule $k[\varphi(x_1)-\varphi(x_2)]$, résultent ces équations

$$12k^2-\pi^2=0,\quad 4kz-\pi=0,\quad 4kz+\pi=0;$$

et 2°, pour la détermination d'une expression semblable à quatre termes, les équations

$$144k^4-60\pi k^2+\pi^4=0,$$
$$48k^2z^2-12k\pi z+\pi^2-12k^2=0,$$
$$48k^2z^2+12k\pi z+\pi^2-12k^2=0.$$

Les expressions approximatives de l'intégrale $\int_0^{\pi}\cos\theta\,\varphi(\cos\theta)d\theta$, que l'on obtient d'après ces équations, se réduisent à ceci :

$$\int_0^{\pi}\cos\theta\,\varphi(\cos\theta)d\theta=\frac{\pi}{\sqrt{12}}\{\varphi(\cos\theta_0)-\varphi[\cos(\pi-\theta_0)]\},$$

$$\int_0^{\pi}\cos\theta\,\varphi(\cos\theta)d\theta=0,151765\{\varphi(\cos\theta_1)+\varphi(\cos\theta_2)$$
$$-\varphi[\cos(\pi-\theta_1)]-\varphi[\cos(\pi-\theta_2)]\},$$

où

$$\theta_0=30^\circ,\quad \theta_1=12^\circ 32'40'',\quad \theta_2=47^\circ 51'32''.$$

On trouverait des expressions plus approchées de l'intégrale $\int_0^\pi \cos\theta\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta$, en prenant plus de termes dans la formule

$$L[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_m)+\varphi(x_{m+1})+\varphi(x_{m+2})+\ldots+\varphi(x_{2m})].$$

Nous n'insisterons pas sur la recherche de ces formules; nous remarquerons seulement que, en remplaçant dans toutes ces formules les termes de la forme $\varphi(\cos\theta_i)$ par

$$\frac{1}{l}\left[\varphi\left(\cos\frac{\theta_i}{l}\right)+\varphi\left(\cos\frac{2\pi+\theta_i}{l}\right)+\ldots+\varphi\left(\cos\frac{2(l-1)\pi+\theta_i}{l}\right)\right],$$

où l est un nombre entier, on obtient les expressions approximatives de l'intégrale $\int_0^\pi \cos(l\theta)\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta$.

Ainsi, en partant des formules précédentes, qui donnent les valeurs approchées, à deux et quatre termes, de l'intégrale $\int_0^\pi \cos\theta\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta$, on passerait aux expressions approximatives à $2l$ et $4l$ de l'intégrale $\int_0^\pi \cos(l\theta)\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta$, expressions qui peuvent être présentées ainsi :

$$\frac{\pi}{\sqrt{12}\,l}\sum_{\mu=0}^{\mu=2l}(-1)^\mu\,\varphi\left(\cos\frac{\mu\pi+\theta}{l}\right),$$

$$\frac{0,151765\pi}{l}\sum_{\mu=0}^{\mu=2l}(-1)^\mu\left[\varphi\left(\cos\frac{\mu\pi+\theta'}{l}\right)+\varphi\left(\cos\frac{\mu\pi+\theta''}{l}\right)\right],$$

où les signes de sommation s'étendent à $\mu = 0, 1, 2, \ldots, 2l-1$.

MÉMOIRE SUR LES FORMES BILINÉAIRES;

PAR M. CAMILLE JORDAN.

Nous résoudrons dans ce Mémoire les problèmes suivants :

1° Étant donné un polynôme bilinéaire

$$P = \sum A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n, \quad \beta = 1, 2, \ldots, n),$$

le ramener à une forme canonique simple par des substitutions orthogonales opérées, les unes sur les variables $x_1, \ldots, x_n$, les autres sur les variables $y_1, \ldots, y_n$.

2° Ramener P à une forme simple par des substitutions linéaires quelconques, mais opérées simultanément sur les deux séries de variables $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$.

3° Ramener simultanément à une forme simple deux polynômes bilinéaires P et Q, par des substitutions linéaires quelconques, opérées isolément sur les deux séries de variables.

Le premier de ces problèmes n'a pas encore été abordé à notre connaissance; le deuxième a déjà été traité (dans le cas où n est pair), par M. Kronecker (*Monatsbericht*, 15 octobre 1866), et le troisième par M. Weierstrass (*Ibid.*, 18 mai 1868); mais les solutions données par les éminents géomètres de Berlin sont incomplètes, en ce qu'ils ont laissé de côté certains cas exceptionnels, qui ne manquent pas d'intérêt. Leur analyse est en outre assez difficile à suivre, surtout celle de M. Weierstrass.

Nous pensons donc satisfaire les géomètres en exposant, pour la solution de ces questions, une méthode nouvelle très-simple, et ne comportant plus aucun cas d'exception.

Nous terminerons ce Mémoire en montrant que le troisième problème, borné aux limites où l'avait considéré M. Weierstrass, est iden

tique à celui de la réduction des substitutions linéaires à leur forme canonique.

1. Soit

$$P = \Sigma A_{\alpha\beta}\, x_\alpha y_\beta \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n; \ \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

un polynôme bilinéaire par rapport à chacune des deux séries de variables $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$. Si l'on opère sur cette fonction une double substitution linéaire

$$(1) \qquad x_\alpha = a_{\alpha 1}\xi_1 + a_{\alpha 2}\xi_2 + \ldots + a_{\alpha n}\xi_n,$$

$$(2) \qquad y_\beta = b_{\beta 1}\eta_1 + b_{\beta 2}\eta_2 + \ldots + b_{\beta n}\eta_n,$$

ce polynôme prendra la forme

$$\Sigma\, \mathfrak{A}_{\alpha\beta}\, \xi_\alpha \eta_\beta,$$

analogue à la précédente. On pourra d'ailleurs disposer des coefficients des substitutions (1) et (2), de manière à simplifier cette expression en annulant quelques-uns des coefficients $\mathfrak{A}$.

Supposons d'abord que le déterminant formé avec les coefficients $A_{\alpha\beta}$, que nous appellerons pour abréger le *déterminant* de P, ne soit pas nul. On pourra poser

$$x_1 A_{1\beta} + \ldots + A_{n\beta}\, x_n = \eta_\beta,$$

et P prendra la forme canonique

$$(3) \qquad x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + \ldots + x_n\eta_n.$$

Si le déterminant de P était nul, les fonctions $\eta_1, \ldots, \eta_n$ calculées comme ci-dessus, étant liées par une ou plusieurs relations linéaires, ne seraient plus des indéterminées distinctes. Admettons, pour fixer les idées, que les fonctions $\eta_1, \ldots, \eta_m$ soient distinctes, mais que les suivantes soient liées à celles-ci par des relations linéaires. Substituant dans P les valeurs de $\eta_{m+1}, \ldots,$ tirées de ces relations, P prendra la forme

$$(4) \qquad P = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_m\eta_m.$$

$\xi_1, \ldots, \xi_m$ étant des fonctions de la forme

$$\xi_\rho = x_\rho + c_\rho x_{m+1} + d_\rho x_{m+2} + \ldots,$$

qu'on pourra prendre pour variables indépendantes au lieu de $x_1, \ldots, x_m$.

Nous obtenons ainsi dans tous les cas une forme réduite où chaque variable ne figure que dans un seul rectangle, et dans laquelle tous les coefficients sont égaux à l'unité. Il est clair d'ailleurs que deux réduites correspondant à différentes valeurs du nombre m ne peuvent être transformées l'une dans l'autre; car ces fonctions diffèrent par le nombre des variables distinctes dont elles dépendent.

Nous remarquons enfin qu'il existe une infinité de manières de ramener P à sa forme canonique. En effet, si P est de la forme (4), par exemple, on pourra, sans altérer cette forme, poser

$$\xi_\rho = a_{\rho 1} \xi'_1 + \ldots + a_{\rho m} \xi'_m,$$

pourvu qu'on opère en même temps sur $\eta_1, \ldots, \eta_m$ la substitution *adjointe* définie par les relations

$$\eta'_\rho = a_{1\rho} \eta_1 + \ldots + a_{m\rho} \eta_m.$$

2. Premier problème. Imposons-nous maintenant la condition que les substitutions (1) et (2) soient orthogonales. La réduction de P à une forme plus simple dépend, comme on va le voir, de la solution du problème suivant :

Trouver les maxima et minima de P, lorsque les variables restent assujetties aux relations

$$(5) \qquad x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1, \quad y_1^2 + \ldots + y_n^2 = 1.$$

On aura, pour déterminer ces maxima,

$$(6) \quad \begin{cases} 0 = dP = (A_{11} y_1 + A_{12} y_2 + \ldots) dx_1 + \ldots \\ \qquad + (A_{11} x_1 + A_{21} x_2 + \ldots) dy_1 + \ldots, \end{cases}$$

équation qui doit avoir lieu pour toutes les valeurs de $dx_1, \ldots, dy_1, \ldots$

qui satisfont aux relations

$$(7)\qquad x_1\,dx_1 + \ldots + x_n\,dx_n = 0, \qquad y_1\,dy_1 + \ldots + y_n\,dy_n = 0.$$

L'équation (6) sera donc une combinaison des équations (7), et l'on aura, par suite,

$$(8)\qquad A_{11}\,y_1 + A_{12}\,y_2 + \ldots = \lambda x_1, \quad \ldots, \quad A_{n1}\,y_1 + A_{n2}\,y_2 + \ldots = \lambda x_n,$$

$$(9)\qquad A_{11}\,x_1 + A_{21}\,x_2 + \ldots = \mu y_1, \quad \ldots, \quad A_{1n}\,x_1 + A_{2n}\,x_2 + \ldots = \mu y_n.$$

En vertu des équations (8), le maximum cherché de P sera égal à

$$\begin{aligned}&(A_{11}\,y_1 + A_{12}\,y_2 + \ldots)x_1 + \ldots\\ &+ (A_{n1}\,y_1 + A_{n2}\,y_2 + \ldots)x_n = \lambda(x_1^2 + \ldots + x_n^2) = \lambda.\end{aligned}$$

On verra de même que ce maximum est égal à μ en vertu des équations (9); on aura donc $\lambda = \mu$.

Cette inconnue sera d'ailleurs déterminée par la condition que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \ldots & A_{11} & A_{12} & \ldots \\ 0 & -\lambda & \ldots & A_{21} & A_{22} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ A_{11} & A_{21} & \ldots & -\lambda & 0 & \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & 0 & -\lambda & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \end{vmatrix}$$

des équations (8) et (9) se réduise à zéro.

L'équation $D = 0$, que nous venons d'obtenir, a ses coefficients invariables pour toute transformation orthogonale effectuée sur l'une ou l'autre des deux séries d'indices $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$; car une semblable transformation n'altère pas la forme des équations (5). D'ailleurs cette équation ne contient que des puissances paires de λ. Considérons en effet un terme quelconque de D; soit m le nombre des facteurs de ce terme qui sont empruntés au déterminant partiel

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & \ldots \\ A_{21} & A_{22} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \end{matrix}$$

Ce terme contiendra $n-m$ autres facteurs appartenant aux n premières lignes de D, qui seront égaux chacun à $-\lambda$; il contiendra en outre $n-m$ autres facteurs $-\lambda$, appartenant aux n dernières colonnes de D. Il contiendra donc λ à la puissance $2(n-m)$.

5. Soit λ_1 une des racines de $D=0$. Les équations (8) et (9) feront connaître en général les rapports des quantités correspondantes $x_1,\ldots, y_n$. On achèvera de les déterminer au signe près en employant l'une ou l'autre des équations (5). Même dans le cas exceptionnel où il subsisterait quelque indétermination dans le choix de ces quantités, on pourra obtenir sans difficulté un système de solutions

$$x_1=a_{11},\quad \ldots,\quad x_n=a_{n1},\quad y_1=b_{11},\quad \ldots,\quad y_n=b_{n1}.$$

Cela posé, $a_{11},\ldots, a_{n1}, b_{11},\ldots, b_{n1}$ satisfaisant aux équations (5), on sait qu'on pourra déterminer deux substitutions orthogonales de la forme

$$(10)\quad \begin{cases} \xi_1=a_{11}x_1+\ldots+a_{n1}x_n,\ldots, & \xi_n=a_{1n}x_1+\ldots+a_{nn}x_n, \\ \eta_1=b_{11}y_1+\ldots+b_{n1}y_n,\ldots, & \eta_n=b_{1n}y_1+\ldots+b_{nn}y_n, \end{cases}$$

$a_{12},\ldots, a_{nn}, b_{12},\ldots, b_{nn}$ étant des coefficients convenablement choisis. Substituant dans l'expression des nouvelles variables les valeurs $x_1=a_{11},\ldots, y_n=b_{n1}$, on voit que P sera maximum pour $\xi_1=\eta_1=1$, $\xi_2=\ldots=\eta_n=0$.

Or soit $\Sigma \mathcal{A}_{\alpha\beta}\xi_\alpha\eta_\beta$ ce que devient P rapporté à ces nouvelles variables; on aura, pour déterminer les valeurs de ces variables correspondant au maximum, les relations

$$\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2=1,\quad \eta_1^2+\ldots+\eta_n^2=1,$$

$$\mathcal{A}_{11}\eta_1+\mathcal{A}_{12}\eta_2+\ldots=\lambda_1\xi_1,\ldots,\quad \mathcal{A}_{n1}\eta_1+\mathcal{A}_{n2}\eta_2+\ldots=\lambda_1\xi_n,$$

$$\mathcal{A}_{11}\xi_1+\mathcal{A}_{21}\xi_2+\ldots=\lambda_1\eta_1,\ldots,\quad \mathcal{A}_{1n}\xi_1+\mathcal{A}_{2n}\xi_2+\ldots=\lambda_1\eta_n,$$

analogues à (5), (8), (9). Et pour qu'elles soient satisfaites pour $\xi_1=\eta_1=1$, $\xi_2=\ldots=\eta_n=0$, il faudra qu'on ait

$$\mathcal{A}_{11}=\lambda_1,\quad \mathcal{A}_{12}=\ldots=\mathcal{A}_{1n}=\mathcal{A}_{21}=\ldots=\mathcal{A}_{2n}=0;$$

dont P se réduira à la forme

$$\lambda_1 \xi_1 \eta_1 + P_1,$$

P_1 étant indépendant de ξ_1 et de η_1.

Opérant sur P_1 comme sur P, on pourra le mettre sous la forme $\lambda_2 \xi_2 \eta_2 + P_2$, P_2 ne dépendant plus que de $\xi_3, \eta_3, \ldots$ et, poursuivant ainsi, on arrivera à mettre P sous la forme canonique

$$P = \lambda_1 \xi_1 \eta_1 + \lambda_2 \xi_2 \eta_2 + \ldots + \lambda_n \xi_n \eta_n.$$

4. L'équation D = o devient alors

$$o = \begin{vmatrix} -\lambda & o & . & \lambda_1 & o & \ldots \\ o & -\lambda & . & o & \lambda_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1 & o & \ldots & -\lambda & o & \ldots \\ o & \lambda_2 & \ldots & o & -\lambda & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = (\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_2^2)\ldots,$$

ce qui permet de calculer *a priori* les coefficients de la forme canonique, en résolvant l'équation caractéristique D = o.

On peut également, lorsque cette équation a ses racines inégales, calculer *a priori* les coefficients de la substitution

$$(1) \qquad \xi_\rho = c_{1\rho} x_1 + \ldots + c_{n\rho} x_n, \quad \eta_\rho = d_{1\rho} y_1 + \ldots + d_{n\rho} y_n,$$

nécessaire pour opérer la réduction à la forme canonique. En effet, soit λ_ρ une de ces racines. On aura, pour déterminer les valeurs correspondantes de $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$, les relations

$$\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 = 1, \quad \eta_1^2 + \ldots + \eta_n^2 = 1,$$
$$\lambda_1 \eta_1 = \lambda_\rho \xi_1, \ldots, \lambda_n \eta_n = \lambda_\rho \xi_n,$$
$$\lambda_1 \xi_1 = \lambda_\rho \eta_1, \ldots, \lambda_n \xi_n = \lambda_\rho \eta_n;$$

d'où

$$\eta_\sigma = \xi_\sigma = o, \quad \text{si } \sigma \gtrless \rho,$$

et, par suite,

$$\xi_\rho = \eta_\rho = \pm 1.$$

Les équations (11), résolues par rapport aux x et aux y, donneront les valeurs correspondantes de $x_1,\ldots, x_n$, $y_1,\ldots, y_n$, à savoir :

$$x_1 = \pm c_{1\rho},\ldots, x_n = \pm c_{n\rho}, \quad y_1 = \pm d_{1\rho},\ldots, y_n = \pm d_{n\rho}.$$

Si donc on calcule directement les valeurs de $x_1,\ldots, y_n$, correspondant à $\lambda = \mu = \lambda_\rho$, en partant des équations (5), (8), (9), on obtiendra par là les coefficients $c_{1\rho},\ldots, d_{n\rho}$, au signe près, lequel peut être choisi à volonté.

5. Deuxième problème. — Examinons maintenant le cas où les deux systèmes de variables $x_1,\ldots, x_n$, $y_1,\ldots, y_n$ sont assujettis à éprouver la même substitution.

Soit P_1 ce que devient P lorsqu'on y change $x_1,\ldots, x_n$ en $y_1,\ldots, y_n$, et réciproquement. Posons

$$P + P_1 = 2\Pi, \quad P - P_1 = 2\Pi_1, \quad \text{d'où} \quad P = \Pi + \Pi_1.$$

La fonction P sera ainsi décomposée en la somme de deux autres, l'une Π, symétrique par rapport aux deux systèmes de variables, l'autre Π_1, qui change de signe lorsqu'on permute ces deux systèmes.

Effectuons une même substitution S sur ces deux systèmes de variables; il est clair qu'après cette opération comme avant Π restera symétrique par rapport aux deux systèmes de variables, tandis que Π_1 changera de signe si l'on permute les deux systèmes. Si donc P' est la transformée de P par la substitution en question, les deux portions dont elle se compose seront respectivement Π' et Π'_1, transformées de Π et de Π_1.

Cela posé, soit Ψ la forme quadratique en $x_1,\ldots, x_n$, que l'on obtient en posant $y_1 = x_1,\ldots, y_n = x_n$ dans Π. On pourra, par une substitution convenable,

$$x_1 = f_1(\xi_1,\ldots,\xi_n),\ldots, \quad x_n = f_n(\xi_1,\ldots,\xi_n),$$

réduire Ψ à une somme de carrés, telle que

$$\Psi = \xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2 \quad (m \leqq n).$$

Et il est clair qu'en soumettant Π à la substitution

$$x_1 = f_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, \quad x_n = f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n),$$
$$y_1 = f_1(\eta_1, \ldots, \eta_n), \ldots, \quad y_n = f_n(\eta_1, \ldots, \eta_n),$$

on le mettra sous la forme

$$(12) \qquad \Pi = \xi_1 \eta_1 + \ldots + \xi_m \eta_m.$$

Quant à Π_1, qui doit changer de signe en y remplaçant $\xi_1, \ldots, \xi_n$ par $\eta_1, \ldots, \eta_n$ et réciproquement, il sera de la forme

$$\Pi_1 = \sum A_{\alpha\beta}(\xi_\alpha \eta_\beta - \xi_\beta \eta_\alpha) \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots, n \\ \beta = 1, 2, \ldots, \alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

Cherchons maintenant à simplifier cette expression par une nouvelle substitution opérée sur les deux systèmes de variables, et choisie de telle façon qu'elle n'altère pas la forme canonique (12), déjà trouvée pour Π.

6. Supposons, pour embrasser à la fois dans notre analyse tous les cas qui peuvent se présenter, que l'on ait $m < n$, et considérons ceux des coefficients $A_{\alpha\beta}$, où les indices α et β sont supérieurs à m.

Admettons que l'un d'entre eux, $A_{n,n-1}$ par exemple, soit différent de zéro. Prenons pour variables, au lieu de $\xi_n, \xi_{n-1}, \eta_n, \eta_{n-1}$, les suivantes :

$$\Xi_1 = \sum_\alpha A_{\alpha, n-1} \xi_\alpha, \quad \Xi_2 = \frac{1}{A_{n,n-1}} \sum_\beta A_{n\beta} \xi_\beta,$$
$$H_1 = \sum_\alpha A_{\alpha, n-1} \eta_\alpha, \quad H_2 = \frac{1}{A_{n,n-1}} \sum_\beta A_{n\beta} \eta_\beta.$$

La forme de Π ne sera pas changée, et Π_1 prendra la forme

$$\Pi_1 = (\Xi_1 H_2 - \Xi_2 H_1) + \Pi'_1,$$

Π'_1 étant une fonction analogue à Π_1, mais ne contenant plus que les variables $\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}$.

Soit

$$\Pi'_1 = \Sigma A'_{\alpha\beta}(\xi_\alpha \eta_\beta - \xi_\beta \eta_\alpha) \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots, n-2 \\ \beta = 1, \ldots, \alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

Si l'on a $A'_{\alpha\beta} \gtrless 0$ pour des valeurs de α et de β supérieures à m, on opérera sur Π'_1 comme sur Π_1. Continuant ce procédé de réduction, autant que faire se pourra, on finira par mettre Π_1 sous la forme

$$\Pi_1 = (\Xi_1 H_2 - \Xi_2 H_1) + \ldots + (\Xi_{2p-1} H_{2p} - \Xi_{2p} H_{2p-1}) + \Pi_2,$$

Π_2 étant de la forme

$$\Pi_2 = \Sigma B_{\alpha\beta}(\xi_\alpha \eta_\beta - \xi_\beta \eta_\alpha) \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots, n-2p \\ \beta = 1, \ldots, \alpha - 1 \end{pmatrix},$$

et les coefficients $B_{\alpha\beta}$ étant nuls, toutes les fois qu'on aura simultanément $\alpha > m$, $\beta > m$.

7. Considérons maintenant ceux des coefficients $B_{\alpha\beta}$ dans lesquels on a $\alpha > m$, $\beta \overline{\gtrless} m$. Supposons, pour plus de généralité, que l'un d'entre eux, par exemple $B_{n-2p,m}$, soit différent de zéro. Posons

$$D = \sqrt{B^2_{n-2p,1} + \ldots + B^2_{n-2p,m}}.$$

On sait qu'on pourra déterminer une substitution orthogonale

$$\xi'_1 = \varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_m), \ \ldots, \quad X_1 = \xi'_m = \varphi_m(\xi_1, \ldots, \xi_m),$$

où la fonction X_1 soit précisément égale à $\dfrac{B_{n-2p,1}\xi_1 + \ldots + B_{n-2p,m}\xi_m}{D}$.

Opérons cette substitution sur $\xi_1, \ldots, \xi_m$, et opérons en même temps une substitution toute pareille

$$\eta'_1 = \varphi_1(\eta_1, \ldots, \eta_m), \ \ldots, \quad Y_1 = \eta'_m = \varphi_m(\eta_1, \ldots, \eta_m)$$

sur les variables η. La fonction Π deviendra

$$\xi'_1 \eta'_1 + \ldots + \xi'_{m-1}\eta'_{m-1} + X_1 Y_1,$$

tandis que Π_2 prendra la forme

$$\Pi_2 = D(\xi'_{n-2p}\eta'_m - \xi'_m\eta'_{n-2p}) + \sum_\gamma B'_{\gamma\delta}(\xi'_\gamma\eta'_\delta - \xi'_\delta\eta'_\gamma) \quad \begin{pmatrix} \gamma = 1, \ldots, n-2p-1 \\ \delta = 1, \ldots, \gamma-1 \end{pmatrix},$$

ou en posant

$$X_2 = D\xi'_{n-2p} + \sum_\alpha B'_{\alpha m}\xi'_\alpha - \sum_\gamma B'_{m\gamma}\xi'_\gamma,$$

$$Y_2 = D\eta'_{n-2p} + \sum_\alpha B'_{\alpha m}\eta'_\alpha - \sum_\gamma B'_{m\gamma}\eta'_\gamma,$$

$$\Pi_2 = X_2 Y_1 - X_1 Y_2 + \Pi'_2,$$

Π'_2 étant une fonction analogue à Π_2, mais ne contenant plus les variables X_1, X_2, Y_1, Y_2.

Si Π'_2 renferme des termes qui contiennent les variables $\xi'_{m+1}, \ldots, \xi'_{n-2p-1}$, et dont les coefficients ne soient pas nuls, on le réduira de la même manière qu'il vient d'être fait pour Π_2; et, continuant ainsi aussi longtemps que ce sera possible, on pourra donner à Π et Π_2 les formes suivantes :

$$\Pi = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_{m-q}\eta_{m-q} + X_1 Y_1 + X_3 Y_3 + \ldots + X_{2q-1} Y_{2q-1},$$

$$\Pi_2 = \Pi_3 + (X_2 Y_1 - X_1 Y_2) + (X_4 Y_3 - X_3 Y_4) + \ldots + (X_{2q} Y_{2q-1} - X_{2q-1} Y_{2q}),$$

Π_3 étant une fonction analogue à Π_2, mais ne contenant plus que les variables $\xi_1, \ldots, \xi_{m-q}, \eta_1, \ldots, \eta_{m-q}$.

8. Soit

$$\Pi_3 = \sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}(\xi_\alpha\eta_\beta - \xi_\beta\eta_\alpha) \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots, m-q \\ \beta = 1, \ldots, \alpha-1 \end{pmatrix},$$

et supposons que l'un des coefficients $C_{\alpha\beta}$, par exemple C_{21}, soit $\gtrless 0$. Posons

$$D = \sqrt{C_{21}^2 + \ldots + C_{m-q,1}^2}.$$

On pourra déterminer une substitution orthogonale

$$x_2 = \xi'_2 = f_2(\xi_2, \ldots, \xi_{m-q}), \ldots, \quad \xi'_{m-q} = f_{m-q}(\xi_2, \ldots, \xi_{m-q}),$$

dans laquelle x_2 soit égal à $\frac{1}{D}(C_{21}\xi_2 + \ldots + C_{m-q,1}\xi_{m-q})$. Si l'on opère

cette substitution sur les ξ, en opérant en même temps une substitution semblable sur les η, la forme de Π ne sera pas changée, mais Π_3 deviendra égal à

$$\mathrm{D}(x_2\eta_1 - y_2\xi_1) + \sum_\alpha \mathrm{C}'_\alpha(\xi'_\alpha y_2 - \eta'_\alpha x_2) + \Pi'_3,$$

Π'_3 étant une fonction analogue à Π_3, mais ne dépendant que de $\xi'_3, \ldots, \xi'_{m-q}, \eta'_3, \ldots, \eta'_{m-q}$.

Soit maintenant

$$\Delta_1 = \sqrt{\mathrm{D}^2 + \mathrm{C}'^2_3 + \ldots + \mathrm{C}'^2_{m-q}},$$

on pourra déterminer une substitution orthogonale

$$x_1 = \xi'_1 = \varphi_1(\xi_1, \xi'_3, \ldots), \quad \xi''_3 = \varphi_3(\xi_1, \xi'_3, \ldots), \ldots$$

où x_1 soit égal à $\frac{1}{\Delta_1}(\mathrm{D}\xi_1 + \mathrm{C}'_3\xi'_3 + \ldots)$.

Effectuant cette substitution en même temps qu'une substitution semblable sur la seconde série de variables, il viendra

$$\Pi = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \xi''_3 \eta''_3 + \ldots + \mathrm{X}_1 \mathrm{Y}_1 + \ldots$$

et

$$\Pi_3 = \Delta_1(x_2 y_1 - y_2 x_1) + \Pi''_3,$$

Π''_3 étant analogue à Π_3, mais ne contenant plus x_1, x_2, y_1, y_2.

Si Π''_3 ne se réduit pas à zéro, on pourra le traiter comme Π_3, de manière à donner à Π et Π_3 les formes suivantes :

$$\begin{aligned}
\Pi &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + \xi_5 \eta_5 + \ldots + \mathrm{X}_1 \mathrm{Y}_1 + \ldots, \\
\Pi_3 &= \Delta_1(x_2 y_1 - x_1 y_2) + \Delta_2(x_4 y_3 - x_3 y_4) + \Pi'''_3,
\end{aligned}$$

Π'''_3 ne dépendant que de $\xi_5, \eta_5, \ldots$.

Poursuivant ces réductions jusqu'à la fin, on voit que la fonction $\mathrm{P} = \Pi + \Pi_1$ pourra se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} = {} & [x_1 y_1 + x_2 y_2 + \Delta_1(x_2 y_1 - x_1 y_2)] + \ldots \\
& + [x_{2\mu-1} y_{2\mu-1} + x_{2\mu} y_{2\mu} + \Delta_\mu(x_{2\mu} y_{2\mu-1} - x_{2\mu-1} y_{2\mu})] + \xi_{2\mu+1}\eta_{2\mu+1} + \ldots \\
& + \xi_{m-q-2\mu}\eta_{m-q-2\mu} + [\mathrm{X}_1 \mathrm{Y}_1 + \mathrm{X}_2 \mathrm{Y}_1 - \mathrm{X}_1 \mathrm{Y}_2] + \ldots \\
& + [\mathrm{X}_{2q-1} \mathrm{Y}_{2q-1} + \mathrm{X}_{2q} \mathrm{Y}_{2q-1} - \mathrm{X}_{2q-1} \mathrm{Y}_{2q}] + [\Xi_1 \mathrm{H}_2 - \Xi_2 \mathrm{H}_1] + \ldots \\
& + [\Xi_{2p-1} \mathrm{H}_{2p} - \Xi_{2p} \mathrm{H}_{2p-1}].
\end{aligned}$$

On voit ainsi que, dans tous les cas, P est exprimé par une somme de fonctions partielles dont aucune ne contient plus de quatre variables.

Le nombre total des variables contenues dans cette forme canonique est égal à $2m + 2q + 4p$. Ce nombre sera en général égal à $2n$, mais il pourra être moindre dans certains cas particuliers.

9. Troisième problème. Cherchons maintenant à quelle forme canonique on pourra ramener un système de deux polynômes bilinéaires

$$P = \Sigma A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta, \quad Q = \Sigma B_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta.$$

Nous commencerons par choisir les variables x, y de telle sorte, que P se trouve réduit à sa forme canonique

$$P = x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m.$$

Pour embrasser dans notre analyse tous les cas particuliers, nous supposerons $m < n$, et nous admettrons que Q renferme dans son expression l'une au moins des variables $x_{m+1}, \ldots, x_n, y_{m+1}, \ldots, y_n$, qui ne figurent pas dans P, par exemple x_ρ.

On aura

$$Q = Y x_\rho + Q_1,$$

Y étant une fonction linéaire de $y_1, \ldots, y_n$ et Q_1 étant indépendant de x_ρ.

Si Y contient quelqu'une des variables $y_{m+1}, \ldots, y_m$, on pourra la prendre pour variable indépendante à la place de l'une de ces dernières; on aura alors, en mettant en évidence ceux des termes de Q_1 qui contiennent Y,

$$Q = Y x_\rho + \varphi Y + R,$$

φ étant une fonction linéaire des x autres que x_ρ; et, prenant pour variable indépendante $x_\rho + \varphi = X$, au lieu de x_ρ,

$$Q = XY + R,$$

et le problème sera réduit à ramener à une forme simple P et R, qui ne contiennent plus les variables X et Y.

10. Admettons maintenant que Y se réduise à une fonction de $y_1, \ldots, y_m$ seulement. On pourra supposer qu'il se réduit à y_1 : en effet on peut, sans altérer la forme de P, prendre pour variables indépendantes, au lieu de $y_1, \ldots, y_m$, des fonctions quelconques de ces variables, pourvu qu'on opère en même temps la substitution adjointe sur les variables $x_1, \ldots, x_m$.

Soit donc $Y = y_1$; mettant en évidence dans Q les termes qui contiennent y_1 et x_1, il viendra

$$Q = x_\rho y_1 + X_1 y_1 + x_1 Y_1 + R_1,$$

X_1 étant une fonction linéaire des x, sauf x_ρ, et Y_1 une fonction linéaire des y, sauf y_1.

11. Si Y_1 est nul, on prendra $X = x_\rho + X_1$ pour variable indépendante à la place de x_ρ, et l'on aura

$$Q = X y_1 + R_1, \quad P = x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m = x_1 y_1 + P_1.$$

Il ne restera plus qu'à réduire simultanément les deux fonctions P_1 et R_1, qui ne contiennent plus les variables X_1, x_1, y_1.

12. Supposons en second lieu que Y_1 ne soit pas nul et contienne les variables $y_{m+1}, \ldots, y_n$. On pourra le prendre pour variable indépendante. Cela fait, mettons en évidence ceux des termes de R_1 qui le contiennent; on aura

$$Q = x_\rho y_1 + X_1 y_1 + (x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m) Y_1 + R'_1.$$

Posons maintenant

$$x_1 = x'_1 - a_2 x_2 - \ldots - a_m x_m, \quad y_2 = y'_2 + a_2 y_1, \ldots, \quad y_m = y'_m + a_m y_1,$$

et, la substitution faite, supprimons les accents des nouvelles variables,

pour ne pas compliquer les notations. La forme de P n'aura pas changé et Q sera devenu (en y mettant en évidence les termes en y_1)

$$Q = x_\rho y_1 + X'_1 y_1 + x_1 Y_1 + R''_1;$$

(X'_1 étant une nouvelle fonction de $x_2, \ldots, x_m$), ou, en prenant pour variable $X = x_\rho + X'_1$,

$$Q = X y_1 + x_1 Y_1 + R''_1,$$

il ne restera plus qu'à réduire P_1 et R''_1, qui ne contiennent plus les variables X, Y_1, x_1, y_1.

13. Supposons enfin que Y_1 ne soit pas nul, mais ne contienne que $y_2, \ldots, y_m$. On pourra supposer qu'il se réduit à y_2, car on peut, sans altérer la forme de P, prendre pour variables des fonctions quelconques de $y_2, \ldots, y_m$, pourvu qu'on opère un changement de variables correspondant sur $x_2, \ldots, x_m$.

Mettons en évidence dans Q les termes en y_2 et en x_2. On aura

$$Q = x_\rho y_1 + X_1 y_1 + x_1 y_2 + X_2 y_2 + x_2 Y_2 + R_2,$$

X_2 étant une fonction linéaire des x, sauf x_ρ et x_1, et Y_2 une fonction linéaire des y, sauf y_1 et y_2.

14. Si Y_2 est identiquement nul, on pourra faire disparaître X_2 par un changement de variables. Soit, en effet,

$$X_2 = a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m.$$

Posons

$$x_1 = x'_1 - X_2, \quad y_2 = y'_2 + a_2 y_1, \ldots, \quad y_m = y'_m + a_m y_1,$$

et, la substitution faite, effaçons les accents des nouvelles variables. La forme de P n'aura pas changé, et Q aura pris la forme

$$Q = x_\rho y_1 + X'_1 y_1 + x_1 y_2 + R_2 = X y_1 + x_1 y_2 + R'_2,$$

en posant $x_\rho + X'_1 = X$.

Il ne restera plus qu'à ramener à une forme simple

$$P_2 = P - x_1 y_1 - x_2 y_2 \quad \text{et} \quad R'_2,$$

qui ne contiennent plus les variables X, x_1, y_1, x_2, y_2.

15. Si Y_2 n'est pas nul et contient l'une des variables $y_{m+1},\ldots, y_m$, on le prendra pour variable indépendante, et, mettant en évidence ceux des termes de R_2 qui le contiennent, on aura

$$Q = x_0 y_1 + X_1 y_1 + x_1 y_2 + X_2 y_2 + x_2 Y_2 + X_3 Y_2 + R'_2,$$

et, par une suite de changements de variables opérés comme tout à l'heure, on fera disparaître successivement les termes $X_3 Y_2$, $X_2 y_2$, $X_1 y_1$, de manière à ramener Q à la forme

$$Q = X y_1 + x_1 y_2 + x_2 Y_2 + R''_2,$$

et il ne restera plus qu'à ramener à une forme simple P_2 et R''_2, qui ne contiennent plus les variables X, Y_2, $x_1 y_1$, $x_2 y_2$.

16. Si Y_2 n'est pas nul, mais ne contient pas les variables $y_{m+1},\ldots, y_n$, on pourra supposer qu'il se réduit à y_3. Poursuivant ainsi, on voit qu'on aura en général

$$Q = \mathfrak{A} + R_k,$$

$\mathfrak{A}$ étant de l'une des formes suivantes :

$$\mathfrak{A} = XY,$$
$$\mathfrak{A} = X y_1 + x_1 y_2 + \ldots + x_{k-1} y_k,$$
$$\mathfrak{A} = X y_1 + x_1 y_2 + \ldots + x_{k-1} y_k + x_k Y,$$

où X, Y sont des variables non contenues dans P, et R_k une fonc-

tion qui ne contient plus X, $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k$, et qui ne contiendra pas non plus Y, si Y figure dans l'expression de B.

On a d'ailleurs

$$P = x_1 y_1 + \ldots + x_k y_k + P_k,$$

et l'on n'aura plus qu'à ramener simultanément P_k et R_k à une forme simple.

17. Si R_k contient encore des variables qui ne figurent pas dans P_k, on pourra raisonner sur ces deux fonctions comme sur P et Q et obtenir un nouveau degré de réduction. On pourra donc enfin décomposer P et Q en une somme de parties

$$P = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \ldots + \mathcal{P},$$

$$Q = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \ldots + \mathfrak{Q}$$

telles : 1° que chaque variable ne figure que dans un seul des couples de fonctions partielles, $\mathcal{A}_1, \mathfrak{B}_1$; $\mathcal{A}_2, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathcal{P}, \mathfrak{Q}$; 2° que l'une quelconque $\mathcal{A}_\rho$ des fonctions $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$ soit nulle ou de la forme

$$(13) \qquad \mathcal{A}_\rho = x_\alpha y_\alpha + \ldots + x_\gamma y_\gamma,$$

et la fonction correspondante $\mathfrak{B}_\rho$ de l'une des formes suivantes

$$(14) \qquad \mathfrak{B}_\rho = X y_\alpha + x_\alpha y_{\alpha+1} + \ldots + x_{\gamma-1} y_\gamma + x_\gamma Y,$$

$$(15) \qquad \mathfrak{B}_\rho = X y_\alpha + x_\alpha y_{\alpha+1} + \ldots + x_{\gamma-1} y_\gamma,$$

$$(16) \qquad \mathfrak{B}_\rho = x_\alpha y_{\alpha+1} + \ldots + x_{\gamma-1} y_\gamma + x_\gamma Y,$$

ou plus simplement, si $\mathcal{A}_\rho = 0$, de la forme

$$(17) \qquad \mathfrak{B}_\rho = XY,$$

(X et Y étant des variables qui ne figurent pas dans P) ; 3° que $\mathfrak{Q}$ ne contienne plus aucune variable autre que celles $x_{l+1}, y_{l+1}, \ldots, x_m, y_m$

qui figurent dans l'expression de $\mathfrak{P}$,

$$\mathfrak{P} = x_{l+1}y_{l+1} + \ldots + x_m y_m.$$

18. Toute la question se trouve ainsi ramenée à simplifier l'expression des fonctions restantes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ à $2(m-l)$ variables.

Pour y arriver, considérons la fonction $\mathcal{S} = \omega\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$, ω étant une constante que nous déterminerons par la condition que le déterminant de $\mathcal{S}$ soit égal à zéro. Cette condition donnera pour ω une équation de degré $(m-l)$, qui d'ailleurs ne sera pas identique, car le coefficient du terme en ω^{m-l} sera le déterminant de $\mathfrak{P}$, c'est-à-dire l'unité. Il est d'ailleurs évident que tous les coefficients de l'équation seront des invariants.

Changeons de variables, de manière à ramener $\mathcal{S}$ à sa forme canonique. Il viendra

$$\mathcal{S} = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_\lambda\eta_\lambda, \quad \lambda < m - l.$$

D'ailleurs $\mathfrak{P}$ contient $2(m-l)$ variables distinctes. Il contiendra donc dans son expression les variables qui ne figurent pas dans $\mathfrak{Q}$.

Raisonnant sur $\mathcal{S}$ et $\mathfrak{P}$ comme tout à l'heure sur P et Q, on pourra poser

$$\mathcal{S} = \mathcal{A}'_1 + \mathcal{A}'_2 + \ldots + \mathcal{S}',$$
$$\mathfrak{P} = \mathcal{B}'_1 + \mathcal{B}'_2 + \ldots + \mathfrak{P}',$$

$\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_2, \ldots, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2, \ldots$, ayant des formes analogues à celles de $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{B}_1, \ldots$. Seulement, le déterminant de $\mathfrak{P}$ n'étant pas nul, $\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2, \ldots$ ne pourront être de la forme (15) ni de la forme (16). Par la même raison, le déterminant de $\mathfrak{P}'$ ne sera pas nul.

On aura, par suite,

$$\mathfrak{Q} = \mathcal{S} - \omega\mathfrak{P} = (\mathcal{A}'_1 - \omega\mathcal{B}'_1) + \ldots + \mathfrak{Q}',$$

en posant, pour abréger, $\mathcal{S}' - \omega\mathfrak{P}' = \mathfrak{Q}'$.

Soit maintenant

$$\mathcal{S}' = \omega'\mathfrak{P}' + \mathfrak{Q}',$$

ω étant choisi de telle sorte que le déterminant de S' soit nul; on obtiendra de même

$$S' = \mathfrak{B}'_1 + \ldots + T',$$
$$\Sigma' = \mathfrak{C}''_1 - \omega' \mathfrak{B}''_1 + \ldots + \Sigma'',$$

et enfin

$$P = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{B}'_1 + \ldots + \mathfrak{B}''_1 + \ldots,$$
$$Q = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \ldots + \mathfrak{C}'_1 - \omega \mathfrak{B}'_1 + \ldots + \mathfrak{C}''_1 - \omega' \mathfrak{B}''_1 + \ldots$$

On voit d'ailleurs sans difficulté que ω, ω', ... seront les diverses racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le déterminant de $\omega P - Q$.

19. Les deux fonctions P et Q étant ramenées simultanément à la forme canonique que nous venons d'établir, formons le déterminant de l'expression $\omega P + Q$. On verra immédiatement que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il s'annule identiquement, quel que soit ω, est que l'une des fonctions $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ soit de la forme (15) ou (16). Si $k+1$ de ces fonctions appartiennent à l'une ou à l'autre de ces deux formes, non-seulement le déterminant de $\omega P + Q$, mais ses mineurs d'ordre k s'annuleront.

20. M. Weierstrass, en traitant ce problème par une autre méthode, s'est borné au cas où le déterminant de $\omega P + Q$ n'est pas identiquement nul. Nous allons montrer que, dans ce cas, le problème se ramène identiquement à celui de la réduction des substitutions linéaires à leur forme canonique, question dont nous avons donné ailleurs la solution.

Soient ω et ω' deux constantes quelconques, telles que les polynômes

$$\varphi = \omega P - Q, \quad \psi = \omega' P - Q$$

aient leurs déterminants différents de zéro. On exprimera aisément P et Q en fonction de φ et ψ. Reste à assigner une forme simple à ces deux derniers polynômes.

Nous choisirons d'abord les variables indépendantes, de manière à

ramener φ à sa forme canonique

$$\varphi = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Quant à $\mathfrak{Q}$, il sera de la forme

$$\mathfrak{Q} = x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n,$$

$f_1, \ldots, f_n$ étant des fonctions linéaires de $y_1, \ldots, y_n$, dont le déterminant n'est pas nul.

On voit qu'on passera de φ à $\mathfrak{Q}$ en opérant sur les y la substitution

$$S = | y_1, \ldots, y_n \quad f_1, \ldots, f_n |,$$

que nous appellerons la *substitution correspondante* à $\mathfrak{Q}$.

Soit maintenant T une substitution quelconque

$$| x_1, \ldots, x_n \quad a_1 x_1 + b_1 x_2 + \ldots, \ \ldots, \ a_n x_1 + b_n x_2 + \ldots |,$$

opérée sur les variables $x_1, \ldots, x_n$. Cette substitution, étant effectuée sur $\mathfrak{Q}$, le transforme en

$$\mathfrak{Q}_1 = x_1 (a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n) + x_2 (b_2 f_1 + \ldots + b_n f_n + \ldots) + \ldots,$$

et la substitution correspondante sera évidemment égale à SU, U désignant la substitution

$$| y_1, y_2, \ldots, \quad a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n, \ b_1 y_1 + \ldots + b_n y_n, \ldots |.$$

Soit V une autre substitution quelconque,

$$| y_1, \ldots, y_n, \quad \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2 + \ldots, \ \ldots, \ \alpha_n y_1 + \beta_n y_2 + \ldots |,$$

opérée sur les y. En effectuant sur $\mathfrak{Q}_1$, on la transformera en un polynôme $\mathfrak{Q}_2$, correspondant à la substitution VSU.

Effectuons les mêmes transformations sur φ; la substitution correspondante à φ se réduisant à l'unité, la substitution correspondante au polynôme transformé φ_2 sera simplement VU.

Supposons maintenant que les transformations opérées sur les variables $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ soient choisies de telle sorte, qu'elles n'altèrent pas la forme de φ; on aura

$$\varphi_2 = \varphi, \quad \text{d'où} \quad VU = 1 \quad \text{et} \quad V = U^{-1}.$$

Par suite, la substitution correspondante à φ_2 sera $U^{-1}SU$.

Si maintenant on dispose de la substitution arbitraire U pour réduire la transformée $U^{-1}SU$ à sa forme canonique, φ_2 sera le polynôme réduit que nous cherchons.

SUR UNE INTÉGRALE DÉFINIE;

PAR M. J. LIOUVILLE.

L'intégrale dont je veux parler, et que je représente par A, est la suivante :

$$A = \int_0^\pi dx\, \varphi\left(\frac{\sin^2 x}{1 + 2a\cos x + a^2}\right), \tag{1}$$

où a désigne un paramètre constant et φ une fonction arbitraire soumise seulement aux restrictions imposées par la nature même de l'intégrale A dont la valeur doit rester finie et déterminée.

J'ai reconnu que, quand la constante a (ou plutôt sa valeur absolue) est < 1, on a simplement

$$A = \int_0^\pi \varphi(\sin^2 x)\, dx, \tag{2}$$

en sorte que le paramètre a n'influe pas du tout sur la valeur de A.

Si l'on suppose $a > 1$, il n'en sera plus ainsi. On aura alors

$$A = \int_0^\pi \varphi\left(\frac{\sin^2 x}{a^2}\right) dx. \tag{3}$$

Au reste, les deux équations (2) et (3) coïncident dans le cas limite de $a = 1$, et elles se déduisent toujours aisément l'une de l'autre par le changement de a en $\frac{1}{a}$, de sorte qu'il suffit d'établir par exemple l'équation (2) pour en conclure l'équation (3).

En prenant pour la fonction φ une simple puissance de la variable, on est conduit à des résultats obtenus jadis par Poisson, dans le XVIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. Cela seul suffirait pour fournir une démonstration rigoureuse de nos formules; mais j'engage nos jeunes lecteurs à en chercher une démonstration directe et générale. Ce sera pour eux un exercice utile.

ÉTUDE D'UN SYSTÈME DE RAYONS;

PAR M. L. PAINVIN.

---

1. L'étude des systèmes de rayons (ou congruences de droites) peut être faite à deux points de vue : il y a ce qu'on pourrait appeler la *Géométrie infinitésimale* des systèmes de rayons, inaugurée surtout par Hamilton (*Transactions of the royal Irish Academy*, t. XVI), continuée par M. Kummer, dans un beau Mémoire analytique (*Journal de Crelle*, t. 57, ou *Nouvelles Annales*, 1860, 1861, 1862), reprise dernièrement et complétée par M. Mannheim (*Journal de Mathématiques*, 1872, p. 109); dans cette Géométrie, on considère un des rayons du système et tous ceux qui lui sont infiniment voisins, et formant ce qu'on nomme un *pinceau de droites*, et l'on étudie les propriétés de ces pinceaux sans avoir égard à l'ordre ni à la classe du système de rayons.

Il y a, en second lieu, la *Géométrie finie* des systèmes de rayons, où l'on considère l'ensemble de tous les rayons d'un système d'ordre et de classe déterminés, et où l'on étudie les propriétés d'ensemble; Kummer s'est également occupé de ce genre de recherches, et, dans un Mémoire fort remarquable (*Académie des Sciences de Berlin*, 1866), il a fait une étude approfondie des sytèmes de rayons du premier et du second ordre.

Le Mémoire actuel a pour objet un système particulier de rayons de quatrième ordre et de quatrième classe, qui se présente dans le complexe du second ordre dont je me suis précédemment occupé. Ce genre de questions est assez nouveau pour que l'étude d'un système de rayons, même particulier, offre quelque intérêt; d'ailleurs ce n'est

que la continuation et le complément des recherches antérieures que j'ai faites sur un complexe du second ordre, ayant des rapports intimes avec les surfaces homofocales du second ordre et avec la surface des ondes.

J'envisagerai ce système de rayons au double point de vue que j'ai défini en commençant.

§ I. — Détermination des foyers, plans focaux, etc.

2. Lorsque le cône (C) du complexe étudié précédemment (*Nouvelles Annales*, t. XI, 2e série, p. 49, 97, 202, etc.; 1872) se réduit à un système de deux plans, la droite d'intersection des deux plans est une droite particulière du complexe touchant la surface Δ; je donnerai à ces droites le nom de *droites limites*. L'ensemble de toutes les droites limites constitue un *système de rayons*, ou encore une *congruence de droites*; chacune des droites est déterminée lorsqu'on l'assujettit à passer par un point arbitrairement choisi.

Les coordonnées x, y, z d'un point quelconque d'une *droite limite* ou d'un *rayon* du système sont définies par les équations suivantes :

$$(1)\qquad (R)\left\{\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{\lambda x}{a^2+\lambda},\\ y &= y_0 + \frac{\lambda y}{b^2+\lambda},\\ z &= z_0 + \frac{\lambda z}{c^2+\lambda},\end{aligned}\right.$$

ou

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} b_1^2 c_1^2 x_0^2 &= (\rho_1 - a^2)(\rho_2 - a^2),\\ c_1^2 a_1^2 y_0^2 &= (\rho_1 - b^2)(\rho_2 - b^2),\\ a_1^2 b_1^2 z_0^2 &= (\rho_1 - c^2)(\rho_2 - c^2);\end{aligned}\right.$$

λ est un paramètre arbitraire; x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées du point

où le rayon (R) touche la surface Δ; ρ, ρ_1, ρ_2 sont les paramètres des trois surfaces homofocales passant par le point (x_0, y_0, z_0); premier Mémoire, n° [[**12**]], *loc. cit.*

Dans ce qui suit, je renfermerai dans un double crochet [[ ]] les numéros de renvoi à mon premier Mémoire : *Étude d'un complexe du second ordre* (*Nouvelles Annales*, t. XI, 1872).

On sait qu'en général les droites d'un système de rayons touchent deux surfaces ou deux nappes d'une même surface. Les points du rayon où a lieu le contact se nomment les *foyers de ce rayon* (Kummer); les surfaces touchées sont dites les *surfaces focales* du système de rayons (il peut arriver que les surfaces focales se réduisent à des courbes rencontrées par tous les rayons du système : ce sont alors des *courbes focales*); les plans tangents aux surfaces focales aux points où elles sont touchées par un même rayon sont dits les *plans focaux* de ce rayon.

Je vais chercher d'abord les foyers, les plans focaux, etc., d'un rayon quelconque du système (R), défini par les équations (1).

3. Nous adopterons les notations suivantes, dont plusieurs ont déjà été employées :

$$(3)\quad \begin{cases} (1^\circ) \begin{cases} A = b^2 + c^2, & a_1^2 = b^2 - c^2, & e = a^2 + b^2 + c^2, \\ B = c^2 + a^2, & b_1^2 = c^2 - a^2, & g = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2, \\ C = a^2 + b^2, & c_1^2 = a^2 - b^2, & h = a^2b^2c^2; \end{cases} \\ (2^\circ) \begin{cases} D = (\rho_2 + a^2)(\rho_2 + b^2)(\rho_2 + c^2) = \rho_2^3 + e\rho_2^2 + g\rho_2 + h, \\ D_1 = (\rho_1^2 - a^2)(\rho_1^2 - b^2)(\rho_1^2 - c^2) = \rho_1^2(\rho_1^2 + g)^2 - (e\rho_1^2 + h)^2; \end{cases} \\ (3^\circ) \begin{cases} E = \rho_2(\rho_1^2 + g) - (e\rho_1^2 + h), \\ F = \rho_1^2(\rho_1^2 + g) + \rho_2(e\rho_1^2 + h). \end{cases} \end{cases}$$

Il faudra avoir égard aussi aux relations (28), (29), (30) et (31) du n° [[**13**]]; de là et d'après les valeurs (2) de x_0, y_0, z_0, et les égalités (23), n° [[**11**]], on déduit plusieurs identités que je vais grouper ici; elles nous seront souvent utiles et permettront de faire rapidement les calculs qui seront indiqués dans ce qui suit. Voici ces

8..

relations :

$$(1^\circ)\quad x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = e + \rho_2,$$

$$(2^\circ)\quad Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 = g + \rho_1^2,$$

$$(3^\circ)\quad b^2c^2x_0^2 + c^2a^2y_0^2 + a^2b^2z_0^2 = h - \rho_1^2\rho_2,$$

(3 *bis*)

$$(4^\circ)\quad \frac{x_0^2}{a^2+\rho_2} + \frac{y_0^2}{b^2+\rho_2} + \frac{z_0^2}{c^2+\rho_2} = 1,$$

$$(5^\circ)\quad \frac{x_0^2}{(a^2+\rho_2)^2} + \frac{y_0^2}{(b^2+\rho_2)^2} + \frac{z_0^2}{(c^2+\rho_2)^2} = \frac{[illegible]}{D}.$$

$$(6^\circ)\quad \frac{Ax_0^2}{a^2+\rho_2} + \frac{By_0^2}{b^2+\rho_2} + \frac{Cz_0^2}{c^2+\rho_2} = 0,$$

$$(7^\circ)\quad \frac{x_0^2}{(a^2+\rho_2)^2} + \frac{y_0^2}{(b^2+\rho_2)^2} + \frac{z_0^2}{(c^2+\rho_2)^2} = \frac{[illegible] F + \rho_2 E}{D},$$

$$(8^\circ)\quad \frac{x_0^2}{\rho_1^2-a^2} + \frac{y_0^2}{\rho_1^2-b^2} + \frac{z_0^2}{\rho_1^2-c^2} = 0,$$

$$(9^\circ)\quad \frac{x_0^2}{(\rho_1^2-a^2)^2} + \frac{y_0^2}{(\rho_1^2-b^2)^2} + \frac{z_0^2}{(\rho_1^2-c^2)^2} = -\frac{E}{D_1},$$

$$(10^\circ)\quad \frac{x_0^2(a^2+\rho_2)}{(\rho_1^2-a^2)^2} + \frac{y_0^2(b^2+\rho_2)}{(\rho_1^2-b^2)^2} + \frac{z_0^2(c^2+\rho_2)}{(\rho_1^2-c^2)^2} = -\frac{(\rho_1^2+\rho_2) E + 2\rho_2 F}{D_1}.$$

$$(11^\circ)\quad \frac{a_1^2}{\rho_2+a^2} + \frac{b_1^2}{\rho_2+b^2} + \frac{c_1^2}{\rho_2+c^2} = -\frac{a_1^2b_1^2c_1^2}{D},$$

$$(12^\circ)\quad \frac{a_1^2}{\rho_1^2-a^2} + \frac{b_1^2}{\rho_1^2-b^2} + \frac{c_1^2}{\rho_1^2-c^2} = -\frac{a_1^2b_1^2c_1^2(\rho_1^2+g)}{D_1},$$

$$(13^\circ)\quad \frac{a_1^2}{(\rho_2+a^2)^2} + \frac{b_1^2}{(\rho_2+b^2)^2} + \frac{c_1^2}{(\rho_2+c^2)^2} = -\frac{a_1^2b_1^2c_1^2\frac{\partial D}{\partial \rho_2}}{D^2}.$$

Remarque. A un systeme de valeurs quelconques données aux parametres ρ_1^2 et ρ_2 correspondent huit droites appartenant au systeme de rayons défini par les équations (1) et (2); ces huit rayons forment quatre groupes de droites parallèles et sont situés sous un même hyperboloïde (H), dont l'équation est

$$(4)\qquad (\mathrm{H})\quad \frac{a^2+\rho_2}{\rho_1^2-a^2}x^2 + \frac{b^2+\rho_2}{\rho_1^2-b^2}y^2 + \frac{c^2+\rho_2}{\rho_1^2-c^2}z^2 + 1 = 0.$$

4. Si α, β, γ sont les cosinus des angles que le rayon (1) fait avec

les axes, on aura

$$(5)\qquad \frac{\alpha}{\dfrac{x_0}{a^2-\rho_2^2}} = \frac{\beta}{\dfrac{y_0}{b^2-\rho_2^2}} = \frac{\gamma}{\dfrac{z_0}{c^2-\rho_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\rho_2^2-\rho_1^2}{D}}},$$

en tenant compte de la relation (3 *bis*), (5°).

Nous rappellerons aussi que le rayon (1), qui touche la surface Δ au point (x_0, y_0, z_0), la rencontre encore en deux points qui sont déterminés à l'aide de l'équation (33), n° [[15]], laquelle donne, eu égard aux notations (3), après avoir supprimé le facteur λ^2, qui correspond au point (x_0, y_0, z_0),

$$F + \rho_2 E + 2E.\lambda + E\frac{\rho_2^2-\rho_1^2}{D}\lambda^2 = 0.$$

Or, si l'on désigne par r la distance du point (x, y, z) au point (x_0, y_0, z_0), on a

$$x = x_0 + \alpha r, \quad y = y_0 + \beta r, \quad z = z_0 + \gamma r;$$

c'est-à-dire, en ayant égard aux équations (1) et (5),

$$(6)\qquad r = +\lambda\sqrt{\frac{\rho_2^2-\rho_1^2}{D}}, \quad \text{ou} \quad \lambda = +r\sqrt{\frac{D}{\rho_2^2-\rho_1^2}};$$

nous avons adopté le signe + devant le radical $\sqrt{\dfrac{\rho_2^2-\rho_1^2}{D}}$: le choix était d'ailleurs arbitraire; r représente plus ou moins la distance du point (x, y, z) au point (x_0, y_0, z_0), suivant que le point (x, y, z) se trouve sur la demi-droite comptée à partir du point (x_0, y_0, z_0) et définie par les équations (5), ou sur son prolongement.

Si l'on remplace λ par la valeur (6) dans l'équation qui précède, il vient

$$(7)\qquad r^2 + 2\sqrt{\frac{D}{\rho_2^2-\rho_1^2}}\, r + \left(\frac{F}{E} + \rho_2\right) = 0;$$

l'équation (7) *donne les distances* r_1, r_2 *du point* (x_0, y_0, z_0) *aux*

deux points où le rayon (R), tangent en (x_0, y_0, z_0) à la surface (Δ), rencontre encore cette surface.

De cette équation on conclut

$$(7\ bis)\qquad r_1 - r_2 = -2\sqrt{\frac{D}{\rho_1 - \rho_2}},\quad r_1 r_2 = \frac{F}{E} - \rho_2;$$

ce qui fournit une signification géométrique très-simple des expressions

$$\sqrt{\frac{D}{\rho_1 - \rho_2}},\quad \left(\frac{F}{E} - \rho_2\right).$$

5. Nous allons maintenant chercher les *foyers* du rayon (R), c'est-à-dire les points où il est rencontré par des rayons infiniment voisins.

Les coordonnées x_0, y_0, z_0 du point de départ du rayon, ainsi que les cosinus α, β, γ des angles qu'il fait avec les axes, sont des fonctions des deux paramètres ρ_1, ρ_2, arbitraires et indépendants, définies par les équations (2) et (5).

Soient x, y, z les coordonnées du point où le rayon (R) est rencontré par un rayon infiniment voisin, on aura

$$(8)\qquad \frac{x - x_0}{\dfrac{x_0}{a^2 + \rho_1}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{y_0}{b^2 + \rho_1}} = \frac{z - z_0}{\dfrac{z_0}{c^2 + \rho_1}} = \mu,$$

et μ est alors, non plus une quantité arbitraire comme λ dans les équations (1), mais une fonction déterminée des paramètres ρ_1 et ρ_2. Ces égalités donnent

$$x = x_0 + \mu\frac{x_0}{a^2 + \rho_1},\quad y = y_0 + \mu\frac{y_0}{b^2 + \rho_1},\quad z = z_0 + \mu\frac{z_0}{c^2 + \rho_1};$$

si l'on différentie ces équations en faisant varier arbitrairement ρ_1 et ρ_2, x, y, z ne varient pas, puisque ce sont les coordonnées du point de

rencontre du rayon (R) avec un rayon infiniment voisin; on a donc

$$(9)\qquad \begin{cases} dx_0 + \mu d\dfrac{x_0}{a^2+\rho} + \dfrac{x_0}{a^2+\rho_2}\,d\mu = 0,\\[2ex] dy_0 + \mu d\dfrac{y_0}{b^2+\rho} + \dfrac{y_0}{b^2+\rho_2}\,d\mu = 0,\\[2ex] dz_0 + \mu d\dfrac{z_0}{c^2+\rho} + \dfrac{z_0}{c^2+\rho_2}\,d\mu = 0. \end{cases}$$

Ajoutons ces dernières équations, après les avoir multipliées respectivement par $a_1^2\dfrac{a^2+\rho_2}{x_0}$, $b_1^2\dfrac{b^2+\rho_2}{y_0}$, $c_1^2\dfrac{c^2+\rho_2}{z_0}$, il vient

$$(10)\qquad \begin{cases} \left(a_1^2\dfrac{a^2+\rho_2}{x_0}dx_0 + b_1^2\dfrac{b^2+\rho_2}{y_0}dy_0 + c_1^2\dfrac{c^2+\rho_2}{z_0}dz_0\right)\\[2ex] \quad + \mu\left(a_1^2\dfrac{a^2+\rho_2}{x_0}d\dfrac{x_0}{a^2+\rho} + b_1^2\dfrac{b^2+\rho_2}{y_0}d\dfrac{y_0}{b^2+\rho} + c_1^2\dfrac{c^2+\rho_2}{z_0}d\dfrac{z_0}{c^2+\rho}\right) = 0; \end{cases}$$

puis, entre ces mêmes équations, éliminons μ et $d\mu$; on a

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} dx_0 & d\dfrac{x_0}{a^2+\rho} & \dfrac{x_0}{a^2+\rho_2}\\[2ex] dy_0 & d\dfrac{y_0}{b^2+\rho} & \dfrac{y_0}{b^2+\rho_2}\\[2ex] dz_0 & d\dfrac{z_0}{c^2+\rho} & \dfrac{z_0}{c^2+\rho_2} \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation (11) donne la condition pour que le rayon (R) soit rencontré par un rayon infiniment voisin, et l'équation (10) fournit la valeur correspondante de μ.

L'équation (11) développée devient

$$(11\ bis)\qquad \begin{cases} \dfrac{x_0}{a^2+\rho_2}\left(dy_0\, d\dfrac{z_0}{c^2+\rho} - dz_0\, d\dfrac{y_0}{b^2+\rho}\right)\\[2ex] + \dfrac{y_0}{b^2+\rho_2}\left(dz_0\, d\dfrac{x_0}{a^2+\rho} - dx_0\, d\dfrac{z_0}{c^2+\rho}\right)\\[2ex] + \dfrac{z_0}{c^2+\rho_2}\left(dx_0\, d\dfrac{y_0}{b^2+\rho} - dy_0\, d\dfrac{x_0}{a^2+\rho}\right) = 0. \end{cases}$$

Or on déduit des équations (2)

(12)
$$\left\{\begin{aligned} dx_0 &= \frac{[illegible] - a^2}{b_1^2 c_1^2 x_0}\rho_1 d\rho_1 + \frac{[illegible] - a^2}{[illegible]} d\rho_2,\\ dy_0 &= \frac{[illegible] - b^2}{[illegible]}\rho_1 d\rho_1 + \frac{[illegible] - b^2}{[illegible]} d\rho_2,\\ dz_0 &= \frac{[illegible]}{a_1^2 b_1^2 z_0}\rho_1 d\rho_1 + \frac{[illegible] - c^2}{[illegible]} d\rho_2.\end{aligned}\right.$$

(12 *bis*)
$$\left\{\begin{aligned} d\frac{x_0}{a^2 - [illegible]} &= \frac{1}{[illegible]}\rho_1 d\rho_1 - \frac{[illegible]}{[illegible]} d\rho_2,\\ d\frac{y_0}{b^2 - [illegible]} &= \frac{1}{[illegible]}\rho_1 d\rho_1 - \frac{[illegible]}{[illegible]} d\rho_2,\\ d\frac{z_0}{[illegible]} &= \frac{1}{[illegible]}\rho_1 d\rho_1 - \frac{[illegible]}{[illegible]} d\rho_2.\end{aligned}\right.$$

De là résulte

(13)
$$\left\{\begin{aligned} &dy_0\, d\frac{[illegible]}{[illegible]} - dz_0\, d\frac{y_0}{b^2 - [illegible]}\\ &= [illegible]\, d\rho_1^2 - \frac{[illegible]}{[illegible]} d\rho_2^2\\ &\quad [illegible]\left[[illegible] - A\right]\rho_1 d\rho_1 d\rho_2\Big\}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on substitue les valeurs (13) dans l'équation (11 *bis*), il vient, après avoir multiplié par $x_0 y_0 z_0$ et supprimé le facteur $a_1^2 b_1^2 c_1^2$, et en ayant égard aux notations (3),

$$\begin{aligned} &\Big\{\rho_1^2 d\rho_1^2 \left([illegible]\right)\\ &- \frac{D}{4D}\left(\frac{x_0^2}{[illegible] - a^2} + \frac{y_0^2}{[illegible] - b^2} + \frac{z_0^2}{[illegible] - c^2}\right) d\rho_2^2\\ &+ \frac{1}{[illegible]D}\Big\{ \frac{x_0^2}{a^2}\left[(\rho_1^2 - b^2)(\rho_2 - c^2)^2 - (\rho_1^2 - c^2)(\rho_2 - b^2)^2\right]\\ &\qquad \frac{y_0^2}{b^2}\left[(\rho_1^2 - c^2)(\rho_2 - b^2)^2 - (\rho_1^2 - b^2)(\rho_2 - a^2)^2\right]\\ &\qquad \frac{z_0^2}{c^2}\left[(\rho_1^2 - a^2)(\rho_2 - a^2)^2 - (\rho_1^2 - a^2)(\rho_2 - c^2)^2\right]\\ &\qquad\qquad D\left(\frac{A x_0^2}{a^2 - [illegible]} + \frac{B y_0^2}{b^2 - [illegible]} + \frac{C z_0^2}{c^2 - [illegible]}\right)\Big\}\rho_1 d\rho_1 d\rho_2\Big\} = 0.\end{aligned}$$

Si maintenant on remarque que

$$(\rho_1^2 - b^2)(\rho_2 - c^2)^2 - (\rho_1^2 - c^2)(\rho_2 - b^2)^2$$
$$= a_1^2[2\rho_1^2\rho_2 - A(\rho_1^2 - \rho_2^2) + 2b^2c^2\rho_2],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et si l'on a égard aux relations (3 *bis*), l'égalité précédente se réduit à

$$\rho_1^2 d\rho_1^2 - \frac{1}{2D}[2\rho_1^2\rho_2(e+\rho_2) + (\rho_1^2+\rho_2^2)(g+\rho_1^2) + 2\rho_2(h-\rho_1^2\rho_2)]\rho_1 d\rho_1 d\rho_2 = 0,$$

ou enfin à

$$(14) \qquad 2D\rho_1 d\rho_1^2 - (F + \rho_2 E)\, d\rho_1\, d\rho_2 = 0.$$

6. L'équation (14) donne les deux solutions

$$(15) \quad \begin{cases} (1^\circ) & d\rho_1 = 0, \\ (2^\circ) & \rho_1 d\rho_1 = \dfrac{F + \rho_2 E}{2D} d\rho_2. \end{cases}$$

Pour la première des solutions (15), l'équation (10) donne, en tenant compte des valeurs (12) pour $d\rho_1 = 0$,

$$\mu \frac{a_1^2 b_1^2 c_1^2}{2D} = 0;$$

d'où il résulte par les équations (8)

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0.$$

Ainsi nous trouvons, comme premier foyer f_0, le point de départ (x_0, y_0, z_0) du rayon D, c'est-à-dire le point où il touche la surface Δ; la surface Δ est donc une première surface focale; ce qui devait être, d'après les propriétés démontrées dans le premier Mémoire.

Considérons maintenant la seconde des solutions (15), savoir

$$(2^\circ) \qquad \rho_1 d\rho_1 = \frac{F + \rho_2 E}{2D} d\rho_2.$$

Calculons d'abord la valeur de μ fournie par l'équation (10), sans introduire aucune hypothèse. Ayons égard aux valeurs (12) et (12 *bis*), et remarquons que

$$\frac{a_1^2(a^2+\rho_2)^2}{b_1^2c_1^2x_0^2} = \frac{a_1^2(a^2+\rho_2)}{\rho_1^2-a^2} = a_1^2b_1^2c_1^2\frac{r_1^2}{(\rho_1^2-a^2)^2},$$

$$\frac{a_1^2(a^2+\rho_2)}{b_1^2c_1^2x_0^2} = \frac{a_1^2}{\rho_1^2-a^2}, \quad \frac{a_1^2(\rho_1^2-a^2)}{b_1^2c_1^2x_0^2} = \frac{a_1^2}{a^2+\rho_2},$$

l'équation (10) devient

$$a_1^2b_1^2c_1^2\rho_1 d\rho_1\sum\frac{r_1^2}{(\rho_1^2-a^2)^2} - \mu\left(\rho_1 d\rho_1\sum\frac{a_1^2}{\rho_1^2-a^2} - \frac{1}{2}d\rho_2\sum\frac{a_1^2}{a^2+\rho_2}\right) = 0,$$

ou enfin, en ayant égard aux relations (3 *bis*) : (9°), (1°)′, (2°)′:

(3°) $$\mu\left[\frac{D_1}{2D}d\rho_2 - \rho_1 d\rho_1(\rho_1^2+g)\right] - E\rho_1 d\rho_1 = 0.$$

En remplaçant maintenant $\rho_1 d\rho_1$ par la valeur (2°), il vient

$$\mu[D_1 - (\rho_1^2+g)(F+\rho_2E)] = E(F+\rho_2E);$$

mais, d'après les relations (3), on a

$$D_1 = \rho_1^2(\rho_1^2+g)^2-(e\rho_1^2+h)^2,$$
$$F+\rho_2E = (\rho_1^2+\rho_2^2)(\rho_1^2+g)+2\rho_2(e\rho_1^2+h);$$

par conséquent

$$D_1-(F+\rho_2E)(\rho_1^2+g) = -\rho_2^2(\rho_1^2+g)^2 - 2\rho_2(\rho_1^2+g)(e\rho_1^2+h)-(e\rho_1^2+h)^2 = -E^2;$$

on a donc définitivement

(16) $$\mu = -\frac{F+\rho_2E}{E}.$$

Si nous désignons par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du second foyer f_1, par δ sa distance au point (x_0, y_0, z_0) qui est le premier foyer f_0, les

équations (8) et (6) donnent alors, en y remplaçant μ par sa valeur (16),

$$x_1 - x_0 = -\frac{x_0}{a^2+\rho_2}\left(\frac{F}{E}+\rho_2\right),\quad y_1 - y_0 = -\frac{y_0}{b^2+\rho_2}\left(\frac{F}{E}+\rho_2\right),$$

$$z_1 - z_0 = -\frac{z_0}{c^2+\rho_2}\left(\frac{F}{E}+\rho_2\right),$$

$$\delta = -\frac{F+\rho_2 E}{E}\sqrt{\frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{D}},$$

ou encore

$$(17)\qquad x_1 = \frac{x_0}{a^2+\rho_2}\,\frac{a^2E-F}{E},\quad y_1 = \frac{y_0}{b^2+\rho_2}\,\frac{b^2E-F}{E},\quad z_1 = \frac{z_0}{c^2+\rho_2}\,\frac{c^2E-F}{E}.$$

Si l'on remarque que, d'après les formules (30), n° [[**13**]], on a

$$a^2E - F = -(\rho_1^2 - a^4)(\rho_1^2 + A\rho_2 + b^2c^2),$$

les valeurs (17) de x_1, y_1, z_1 peuvent s'écrire sous cette autre forme

$$(17\ bis)\qquad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{x_0(\rho_1^2-a^4)}{a^2+\rho_2}\,\dfrac{(\rho_1^2+A\rho_2+b^2c^2)}{E}, \\ y_1 = -\dfrac{y_0(\rho_1^2-b^4)}{b^2+\rho_2}\,\dfrac{(\rho_1^2+B\rho_2+c^2a^2)}{E}, \\ z_1 = -\dfrac{z_0(\rho_1^2-c^4)}{c^2+\rho_2}\,\dfrac{(\rho_1^2+C\rho_2+a^2b^2)}{E}. \end{cases}$$

7. Nous avons ainsi ce premier théorème :

THÉORÈME I. — *Sur chaque rayon il y a deux* FOYERS f_0 *et* f_1 ; *si* ρ_1 *et* ρ_2 *sont les valeurs des paramètres qui déterminent ce rayon, les coordonnées* x_0, y_0, z_0 *du premier foyer* f_0 *sont définies par les équations*

$$(1^{\circ})\qquad \begin{cases} b_1^2c_1^2x_0^2 = (\rho_1^2-a^4)(\rho_2+a^2), \\ c_1^2a_1^2y_0^2 = (\rho_1^2-b^4)(\rho_2+b^2), \\ a_1^2b_1^2z_0^2 = (\rho_1^2-c^4)(\rho_2+c^2); \end{cases}$$

les coordonnées x_1, y_1, z_1 *du second foyer* f_1 *sont données par les équa-*

tions

$$(18)\quad (2^\circ)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{x_0}{a^2+\rho_2}\left(a^2 - \dfrac{F}{E}\right) = -\dfrac{x_0(\rho_1 - a^2)(\rho_2^2 + A\rho_2 + b^2c^2)}{(a^2+\rho_2)E}, \\[2ex] y_1 = \dfrac{y_0}{b^2+\rho_2}\left(b^2 - \dfrac{F}{E}\right) = -\dfrac{y_0(\rho_1 - b^2)(\rho_2^2 + B\rho_2 + c^2a^2)}{(b^2+\rho_2)E}, \\[2ex] z_1 = \dfrac{z_0}{c^2+\rho_2}\left(c^2 - \dfrac{F}{E}\right) = -\dfrac{z_0(\rho_1 - c^2)(\rho_2^2 + C\rho_2 + a^2b^2)}{(c^2+\rho_2)E}, \end{cases}$$

les quantités E *et* F *étant définies par les égalités* (3).

La distance δ *des deux foyers est donnée par la formule*

$$(3^\circ)\qquad \delta = \frac{F + \rho_2 E}{E}\sqrt{\frac{\rho_1 - \rho_2}{D}};$$

et si r_1, r_2 *sont les distances du foyer* f_0 *aux deux points où le rayon rencontre la surface* Δ, *on a*

$$(4^\circ)\qquad r_1 + r_2 = -2\sqrt{\frac{D}{\rho_1 - \rho_2}}, \quad r_1 r_2 = \frac{F}{E} + \rho_2.$$

Pour les foyers f_0 *la* SURFACE FOCALE *est la surface* Δ *déjà rencontrée et étudiée dans le premier Mémoire ; pour les foyers* f_1 *la* SURFACE FOCALE *est une certaine surface que je désignerai par* Σ. *Les rayons* (R) *touchent tous les surfaces* Δ *et* Σ.

On pourrait obtenir l'équation de la surface Σ en éliminant ρ_1 et ρ_2 entre les équations (18) (2°); nous la trouverons plus loin par une méthode beaucoup plus simple.

Remarque I. — Le paramètre ρ_2 devra varier entre des limites différentes suivant que le point (x_0, y_0, z_0) appartient à la nappe inférieure ou à la nappe supérieure de la surface Δ; et d'après les formules (23) et (24), (3°), n° [[11]], et les inégalités (14), n° [[5]], on a pour la nappe supérieure

$$-b^2 < \rho_2 < -c^2;$$

pour la nappe inférieure

$$-a^2 < \rho_2 < -b^2.$$

Remarque II. — Il a été convenu que, dans toutes les formules qui précèdent, le radical $\sqrt{\frac{\rho_2-\rho_1}{D}}$ doit être pris avec une valeur absolue positive, lorsque cette valeur est réelle.

8. Les équations (3°) et (4°) du groupe (18) donnent

$$\delta = r_1 r_2 \frac{2}{r_1+r_2} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{\delta} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}.$$

De là ce second théorème :

Théorème II. — *Entre la distance δ des deux foyers et les distances r_1, r_2 du foyer f_0 aux points où le rayon rencontre la première focale Δ, on a la relation simple*

$$(19) \qquad \frac{2}{\delta} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2},$$

c'est-à-dire que *les deux foyers f_0, f_1 et les deux points* R_1, R_2 *où le rayon* (R) *coupe la surface Δ forment un système harmonique.*

9. Nous allons nous occuper, en second lieu, de la recherche des *plans focaux* relatifs au rayon (R), c'est-à-dire des plans renfermant le rayon (R) et l'un ou l'autre des rayons qui le rencontrent.

Ce plan devant contenir le rayon (R) passera par le point (x_0, y_0, z_0) et sera parallèle à la direction dont les cosinus sont proportionnels à $\frac{x_0}{a^2+\rho_2}$, $\frac{y_0}{b^2+\rho_2}$, $\frac{z_0}{c^2+\rho_2}$; si on l'assujettit en outre à être parallèle au rayon infiniment voisin $\frac{x_0}{a^2+\rho_2} + d\frac{x_0}{a^2+\rho_2}, \cdots$, son équation sera

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ \frac{x_0}{a^2+\rho_2} & \frac{y_0}{b^2+\rho_2} & \frac{z_0}{c^2+\rho_2} & 0 \\ d\frac{x_0}{a^2+\rho_2} & d\frac{y_0}{b^2+\rho_2} & d\frac{z_0}{c^2+\rho_2} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \dfrac{x_0}{a^2+\rho_2} & \dfrac{y_0}{b^2+\rho_2} & \dfrac{z_0}{c^2+\rho_2} \\ d\dfrac{x_0}{a^2+\rho_2} & d\dfrac{y_0}{b^2+\rho_2} & d\dfrac{z_0}{c^2+\rho_2} \end{vmatrix} = 0,$$

ou enfin

$$(19)\quad \begin{cases} (x - x_0)\left(\dfrac{y_0}{b^2+\rho_2}\, d\dfrac{z_0}{c^2+\rho_2} - \dfrac{z_0}{c^2+\rho_2}\, d\dfrac{y_0}{b^2+\rho_2}\right) \\ + (y - y_0)\left(\dfrac{z_0}{c^2+\rho_2}\, d\dfrac{x_0}{a^2+\rho_2} - \dfrac{x_0}{a^2+\rho_2}\, d\dfrac{z_0}{c^2+\rho_2}\right) \\ + (z - z_0)\left(\dfrac{x_0}{a^2+\rho_2}\, d\dfrac{y_0}{b^2+\rho_2} - \dfrac{y_0}{b^2+\rho_2}\, d\dfrac{x_0}{a^2+\rho_2}\right) = 0 \end{cases}$$

Or des égalités (12 *bis*) on tire

$$\frac{y_0}{b^2+\rho_2}\, d\frac{z_0}{c^2+\rho_2} - \frac{z_0}{c^2+\rho_2}\, d\frac{y_0}{b^2+\rho_2}$$
$$= -\frac{A}{a_1^2 b_1^2 c_1^2 y_0 z_0}\rho_1\, d\rho_1 - \frac{1}{2 a_1^2 b_1^2 c_1^2 y_0 z_0}\,\frac{D_a}{D}\,\frac{a^2+\rho_2}{\rho_1^2 - a^2}\, d\rho_2;$$

l'équation (19) devient alors

$$(20)\quad \begin{cases} x x_0\left(A\rho_1\, d\rho_1 - \dfrac{D_a}{2D}\,\dfrac{a^2+\rho_2}{\rho_1^2 - a^2}\, d\rho_2\right) \\ + y y_0\left(B\rho_1\, d\rho_1 - \dfrac{D_b}{2D}\,\dfrac{b^2+\rho_2}{\rho_1^2 - b^2}\, d\rho_2\right) \\ + z z_0\left(C\rho_1\, d\rho_1 - \dfrac{D_c}{2D}\,\dfrac{c^2+\rho_2}{\rho_1^2 - c^2}\, d\rho_2\right) = (g - \rho_1^2)\,\rho_1\, d\rho_1 - \dfrac{D}{2D}\, d\rho_2. \end{cases}$$

Pour le foyer f_0, on a, d'après la première des équations (15),

$$d\rho_1 = 0;$$

l'équation (20) devient alors

$$(21)\quad (F_0)\quad x x_0\,\frac{a^2+\rho_2}{\rho_1^2 - a^2} + y y_0\,\frac{b^2+\rho_2}{\rho_1^2 - b^2} + z z_0\,\frac{c^2+\rho_2}{\rho_1^2 - c^2} - 1 = 0$$

Pour le foyer f_1, on a, d'après la seconde des équations (15),

$$\rho_1\, d\rho_1 = \frac{F + \rho_2 E}{2D}\, d\rho_2,$$

et l'équation (20) devient

$$xx_0\left[A(F+\rho_2 E) + (a^2+\rho_2)(\rho_1^2 - b^2)(\rho_1^2 - c^2)\right] + yy_0[\ldots] + zz_0[\ldots]$$
$$= (g+\rho_1^2)(F+\rho_2 E) - D_1;$$

mais on constate aisément que

$$A(F+\rho_2 E) + (a^2+\rho_2)(\rho_1^2 - b^2)(\rho_1^2 - c^2) = E(\rho_1^2 + A\rho_2 + b^2c^2),$$
$$(g+\rho_1^2)(F+\rho_2 E) - D_1 = E^2,$$

et l'on a définitivement

$$(22)\qquad (F_1)\left\{\begin{array}{l} xx_0(\rho_1^2 + A\rho_2 + b^2c^2) + yy_0(\rho_1^2 + B\rho_2 + c^2a^2) \\ \qquad\qquad + zz_0(\rho_1^2 + C\rho_2 + a^2b^2) = E. \end{array}\right.$$

Le plan (F_1), (22), touche la surface Δ au point f_0, comme cela résulte évidemment de l'équation (27), n° [[**12**]].

Quant au plan F_0, il touche la surface Σ au point f_1. En effet, des formules (18), (2°), on tire

$$dx_1 = \left(a^2 - \frac{F}{E}\right) d\frac{x_0}{a^2+\rho_1} - \frac{x_0}{a^2+\rho_2}\, d\frac{F}{E}, \quad dy_1 = \ldots, \quad dz_1 = \ldots;$$

si l'on substitue les valeurs $x_1 + dx_1$, $y_1 + dy_1$, $z_1 + dz_1$, au lieu de x, y, z, dans l'équation (21) du plan F_0, il vient

$$\sum x_1 x_0 \frac{\rho_2 + a^2}{\rho_1^2 - a^4} + \sum\left(a^2 - \frac{F}{E}\right) x_0 \frac{\rho_2 + a^2}{\rho_1^2 - a^4}\, d\frac{x_0}{a^2+\rho_1}$$
$$- d\frac{F}{E}\sum \frac{x_0^2}{a^2+\rho_2}\,\frac{a^2+\rho_2}{\rho_1^2 - a^4} + 1;$$

or cette quantité est nulle, quels que soient $d\rho_1$ et $d\rho_2$, car, si l'on a égard aux valeurs (18), (2°), et (12 *bis*), elle se réduit à

$$-1 + \frac{\rho_1\, d\rho_1}{D_1}\left[\frac{F}{E}(\rho_2\rho_1^2 + e\rho_1^2 + g\rho_2 + h) - (\rho_1^4 + e\rho_2\rho_1^2 + g\rho_1^2 + h\rho_2)\right] + 1$$

ou

$$\frac{d}{D_1}\left(F - \frac{F}{E}E\right);$$

donc le plan F_0 touche en f_1 la surface Σ.

Remarquons enfin que le plan (F_0) est osculateur en f_0 à la courbe définie sur la surface Δ par l'équation

$$d\rho_1 = 0,$$

et que le plan F_1 est osculateur en f_1 à la courbe définie sur la surface Σ par l'équation

$$\rho_1 d\rho_1 = \frac{F - \rho_1 E}{2D} d\rho_2.$$

En effet, considérons, par exemple, le cas

$$d\rho_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \rho_1 = \text{const.};$$

lorsqu'un rayon infiniment voisin du rayon (R) (ou $f_0 f_1$) vient couper celui-ci en f_0, ce rayon décrit un élément de surface développable ayant pour arête de rebroussement la courbe $\rho_1 = \text{const.}$; le plan (F_0), passant par (R) et parallèle au rayon infiniment voisin, devient, à la limite, tangent à la surface développable le long de $f_0 f_1$, et par conséquent osculateur en f_0 à l'arête de rebroussement. De plus, ce même plan, contenant les rayons $f_0 f_1$ et $f_0' M_1$ respectivement tangents à la surface Σ en f_1 et M_1, deviendra, à la limite, tangent à la surface Σ en f_1, puisque la sécante $f_1 M_1$ devient tangente en f_1.

Il en sera de même pour le plan (F_1), lequel sera osculateur en f_1 et touchera Δ en f_0.

Ainsi :

Théorème III. — *Les* plans focaux *relatifs au rayon* (ρ_1, ρ_2) *ont respectivement pour équations*

$$(23)\quad \begin{cases} (F_0) & (1^\circ) \quad xx_0 \dfrac{\rho_1 - a^2}{\rho_1^2 - a^4} + yy_0 \dfrac{\rho_1 - b^2}{\rho_1^2 - b^4} + zz_0 \dfrac{\rho_1 - c^2}{\rho_1^2 - c^4} + 1 = 0, \\ (F_1) & (2^\circ) \left\{ \begin{aligned} & xx_0(\rho_1^2 + A\rho_2 + b^2c^2) + yy_0(\rho_1^2 + B\rho_2 + c^2a^2) \\ & \qquad + zz_0(\rho_1^2 + C\rho_2 + a^2b^2) = E. \end{aligned} \right. \end{cases}$$

Le plan focal (F_0), *correspondant au foyer* f_0, *touche la surface* Σ *en* f_1 *et est osculateur en* f_0 *à la courbe que le rayon touche sur la surface* Δ, *courbe définie par l'équation*

$$(3^\circ) \qquad d\rho_1 = 0;$$

le plan focal (F_1), *correspondant au foyer* f_1, *touche la surface* Δ *en* f_0 *et est osculateur en* f_1 *à la courbe que le rayon touche sur la surface* Σ, *courbe définie par l'équation*

$$(4^\circ) \qquad \rho_1\, d\rho_1 = \frac{F + \rho_1 E}{2D}\, d\rho_2.$$

Ajoutons que le plan focal (F_0) *touche l'hyperboloïde* (H), n° [5], *au point* (x_0, y_0, z_0).

10. Désignons par U_0, V_0, W_0 et U_1, V_1, W_1 les coordonnées des plans (F_0) et (F_1); on a

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{ll} (F_0) & \left\{\begin{array}{l} U_0 = -x_0 \dfrac{\rho_2 + a^2}{\rho_1^2 - a^4}, \\[2ex] V_0 = -y_0 \dfrac{\rho_2 + b^2}{\rho_1^2 - b^4}, \\[2ex] W_0 = -z_0 \dfrac{\rho_2 + c^2}{\rho_1^2 - c^4}. \end{array}\right. \\[8ex] (F_1) & \left\{\begin{array}{l} U_1 = x_0 \dfrac{\rho_1^2 + A\rho_2 + b^2c^2}{E}, \\[2ex] V_1 = y_0 \dfrac{\rho_1^2 + B\rho_2 + c^2a^2}{E}, \\[2ex] W_1 = z_0 \dfrac{\rho_1^2 + C\rho_2 + a^2b^2}{E}. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Si l'on transporte ces valeurs dans les formules (18), (2°), on trouve

$$\frac{U_1}{x_1} = \frac{U_0}{x_0}, \quad \frac{V_1}{y_1} = \frac{V_0}{y_0}, \quad \frac{W_1}{z_1} = \frac{W_0}{z_0}.$$

Donc :

Théorème IV. — Si x_0, y_0, z_0 *et* x_1, y_1, z_1 *sont les coordonnées des foyers* f_0 *et* f_1, *situés sur un même rayon* (R); *si* U_0, V_0, W_0 *sont les*

coordonnées du plan focal (F_0) *osculateur en* f_0 *et touchant la surface* Σ *en* f_1, *et que* U_1, V_1, W_1 *soient les coordonnées du plan focal* (F_1) *osculateur en* f_1 *et touchant la surface* Δ *en* f_0, *on a, entre ces éléments, la correspondance très-simple*

$$(25)\qquad \frac{x_1}{U_1}=\frac{x_0}{U_0},\quad \frac{y_1}{V_1}=\frac{y_0}{V_0},\quad \frac{z_1}{W_1}=\frac{z_0}{W_0}.$$

11. Calculons encore l'angle θ des deux plans focaux (F_0) et (F_1). D'après les équations (23), on a

$$(1^\circ)\qquad \cos\theta=\frac{\sum x_0^2\frac{\rho_2-a^2}{\rho_1-a^2}(\rho_1^2-A\rho_2+b^2c^2)}{\sqrt{\sum x_0^2\frac{(a^2-\rho_2)^2}{(\rho_1-a^2)^2}\sum x_0^2(\rho_1^2-A\rho_2+b^2c^2)^2}};$$

mais on trouve, en ayant égard aux relations (3 *bis*) et aux relations (30), n° [**15**]

$$(2^\circ)\quad \begin{cases} \sum x_0^2\frac{\rho_2-a^2}{\rho_1-a^2}(\rho_1^2-A\rho_2+b^2c^2)=\rho_2^2-\rho_1^2, \\ \sum x_0^2\frac{(a^2-\rho_2)^2}{(\rho_1-a^2)^2}=\frac{(\rho_2^2-\rho_1^2)(E-2\rho_2F)}{D_1}, \\ \sum x_0^2(\rho_1^2-A\rho_2+b^2c^2)^2=\sum\frac{1}{b^2c^2}(F-a^2E)[E-A(\rho_2^2-\rho_1^2)] \\ \qquad =E(\rho_2^2-\rho_1^2). \end{cases}$$

De là résulte

$$(26)\qquad \cos^2\theta=\frac{D_1(\rho_2^2-\rho_1^2)}{E[(\rho_2^2-\rho_1^2)(E-2\rho_2F)]},$$

d'où l'on déduit encore

$$(27)\qquad \sin^2\theta=\frac{(F-\rho_2E)^2}{E[(\rho_2^2-\rho_1^2)(E-2\rho_2F)]}.$$

12. Kummer a démontré les propriétés suivantes relatives aux systèmes de rayons :

1° *Les pieds des plus courtes distances d'un rayon à tous les rayons infiniment voisins qui l'entourent se trouvent tous sur un segment déterminé du rayon ; les extrémités de ce segment sont nommées* POINTS LIMITES. (KUMMER, *Nouvelles Annales*, t. XIX, p. 369, année 1860.)

2° *Le point milieu de la distance des foyers coïncide avec le point milieu du segment déterminé par les deux points-limites ; ce point milieu a été nommé le* CENTRE *du rayon.* (KUMMER, *Nouvelles Annales*, t. XX, p. 257, année 1861.)

3° *La distance focale est égale à la distance des points limites, multipliée par les sinus de l'angle que font entre eux les plans focaux.* (KUMMER, *Nouvelles Annales*, t. XX, p. 260.)

13. Nous avons désigné par δ la distance des deux foyers; en représentant par $2d$ la distance des deux points limites, on aura, d'après la troisième des propositions qui précèdent,

$$\delta = 2d\sin\theta ;$$

et, d'après les formules (18, 3°) et (27), il vient

$$2d\,\frac{F+\rho_2 E}{\sqrt{E}\sqrt{(\rho_1^2+\rho_2^2)E+2\rho_2 F}} = -\frac{F+\rho_2 E}{E}\sqrt{\frac{\rho_1^2}{D}}$$

ou, en réduisant,

$$(28)\qquad 2d = -\sqrt{\frac{\rho_1^2}{DE}}\sqrt{(\rho_1^2+\rho_2^2)E+2\rho_2 F}.$$

Si l et l_0 sont les distances des points limites au foyer f_0, on a

$$l - l_0 = 2d,$$

et, d'après la proposition (2°)

$$\frac{\delta}{2} = \frac{l+l_0}{2};$$

d'où l'on déduit

$$2l = 2d + \delta.$$

En remplaçant dans cette dernière égalité $2d$ et δ par leurs valeurs (28) et (18, 3°), il vient

$$(29)\qquad 2l = -\frac{F + [illegible] E}{E}\sqrt{\frac{[illegible]}{D}} - \sqrt{\frac{[illegible]}{DE}}\sqrt{\rho_1^2 [illegible] \rho_2^2 E + 2\rho_2 F}.$$

Si l'on veut introduire la quantité λ, qui figure dans les équations du rayon, il faut avoir égard à la relation (6) et remplacer l par $\lambda\sqrt{\frac{[illegible]}{D}}$, ce qui donne

$$(30)\qquad 2\lambda = -\frac{F + \rho_2 E}{E} [illegible] \sqrt{\frac{[illegible] E + 2\rho_2 F}{E}}.$$

D'après cela, eu égard aux équations (1), nous avons :

Théorème V. — *Les coordonnées x', y', z' des* points limites *sont définies par les équations*

$$(31)\qquad \begin{cases} x' = x_0 - \dfrac{x_0}{a - \rho_2}\lambda', \\ y' = y_0 - \dfrac{y_0}{b - \rho_2}\lambda', \\ z' = z_0 - \dfrac{z_0}{c - \rho_2}\lambda', \end{cases}$$

où λ' est une quelconque des racines de l'équation

$$(32)\qquad \lambda^2 - \frac{F + \rho_2 E}{E}\lambda - \frac{F^2 - \rho_2 [illegible] E^2}{4E^2} = 0.$$

Les distances l des points limites au foyer f_0 seront données par l'équation

$$(33)\qquad l^2 + \sqrt{\frac{[illegible]}{D}}\,\frac{F - \rho_2 E}{E}\,l - \frac{[illegible]}{D}\,\frac{F^2 - \rho_2 E^2}{E^2} = 0.$$

Si d est la demi-distance des points limites, et si r_1 et r_2 sont les distances du foyer f_0 aux points où le rayon rencontre la surface Δ, on a encore

$$(34)\qquad d^2 = \frac{[illegible]\, r_1 r_2 (\rho_1^2 - \rho_2^2)}{(r_1 + r_2)^2}.$$

L'équation de la surface décrite par les points limites s'obtiendrait en éliminant ρ_1, ρ_2 et λ entre les quatre équations (31) et (32), après y avoir remplacé x_0, y_0, z_0 par leurs valeurs (2).

14. La recherche des foyers, n°s 5 et 6, nous conduit en même temps aux équations des courbes que les rayons doivent toucher sur chaque surface focale.

Surface focale Δ.

Pour les foyers f_0, lesquels appartiennent à la surface Δ, on a

$$d\rho_1 = 0, \quad \text{ou} \quad \rho_1 = \text{const.};$$

donc, pour la courbe $\rho_1 = \text{const.}$, il y a un rayon infiniment voisin de R, qui rencontre R (aux infiniment petits du second ordre près); et, par suite, lorsque le rayon R se déplace pour venir coïncider avec ce rayon infiniment voisin, il le fait en touchant la courbe $\rho_1 = \text{const.}$ Réciproquement, si le rayon R se déplace en touchant une courbe tracée sur la surface Δ, on devra avoir $d\rho_1 = 0$, puisque alors il rencontre le rayon infiniment voisin.

D'ailleurs, pour les points de la surface Δ, on a, s'il s'agit, par exemple, de la nappe supérieure, $\rho_1 = -\rho_3$, (23), n° 11; donc les courbes $\rho_1 = \text{const.}$ sont des lignes de courbure de la surface (ρ_1), et ces lignes de courbure seront de systèmes différents pour (ρ_1) lorsqu'on passera d'une nappe à une autre sur la surface Δ, n° 11.

Ajoutons que les rayons du système ne peuvent jamais être des tangentes principales pour la surface Δ.

Voici comment on peut démontrer cette dernière proposition :

Les coordonnées x_0, y_0, z_0 d'un point quelconque de la surface Δ peuvent être considérées comme des fonctions, définies par les équations (2), des paramètres arbitraires ρ_1 et ρ_2; d'après cela, si l'on pose

$$(1°)\quad \left\{ \begin{aligned} X_0 &= \frac{dy_0}{d\rho_1}\frac{dz_0}{d\rho_2} - \frac{dy_0}{d\rho_2}\frac{dz_0}{d\rho_1}, \\ Y_0 &= \frac{dz_0}{d\rho_1}\frac{dx_0}{d\rho_2} - \frac{dz_0}{d\rho_2}\frac{dx_0}{d\rho_1}, \\ Z_0 &= \frac{dx_0}{d\rho_1}\frac{dy_0}{d\rho_2} - \frac{dx_0}{d\rho_2}\frac{dy_0}{d\rho_1}, \end{aligned} \right.$$

les équations de la normale en (x_0, y_0, z_0) à la surface Δ seront

$$(2^\circ)\qquad \frac{x - x_0}{X_0} = \frac{y - y_0}{Y_0} = \frac{z - z_0}{Z_0},$$

ou

$$(3^\circ)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= x_0 + \mu X_0, \\ y &= y_0 + \mu Y_0, \\ z &= z_0 + \mu Z_0; \end{aligned}\right.$$

car, si l'on remplace x_0, y_0, z_0 par leurs valeurs (2) dans l'équation $\Delta = 0$, on a une identité en ρ_1 et ρ_2; par suite,

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dx_0}\frac{dx}{d\rho_1} + \frac{d\Delta}{dy_0}\frac{dy}{d\rho_1} + \frac{d\Delta}{dz_0}\frac{dz}{d\rho_1} &= 0, \\ \frac{d\Delta}{dx_0}\frac{dx}{d\rho_2} + \frac{d\Delta}{dy_0}\frac{dy}{d\rho_2} + \frac{d\Delta}{dz_0}\frac{dz}{d\rho_2} &= 0; \end{aligned}$$

d'où il résulte

$$\frac{\dfrac{d\Delta}{dx_0}}{X_0} = \frac{\dfrac{d\Delta}{dy_0}}{Y_0} = \frac{\dfrac{d\Delta}{dz_0}}{Z_0};$$

ce qui conduit immédiatement aux équations (2°) de la normale.

Si la normale (3°) est rencontrée par la normale infiniment voisine, on devra avoir

$$\begin{aligned} dx_0 + \mu\, dX_0 + X_0\, d\mu &= 0, \\ dy_0 + \mu\, dY_0 + Y_0\, d\mu &= 0, \\ dz_0 + \mu\, dZ_0 + Z_0\, d\mu &= 0; \end{aligned}$$

en éliminant μ et $d\mu$, il vient

$$(4^\circ)\qquad \begin{vmatrix} dx_0 & dX_0 & X_0 \\ dy_0 & dY_0 & Y_0 \\ dz_0 & dZ_0 & Z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Or, si le rayon (R) est une tangente principale en (x_0, y_0, z_0) à la surface Δ, il doit d'abord toucher une courbe tracée sur cette surface, et

l'on aura, d'après ce qui précède, $d\rho_2 = 0$; l'équation de condition (4°) devient alors

$$(5^\circ)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{dx_0}{d\rho_1} & \dfrac{dX_0}{d\rho_1} & X_0 \\ \dfrac{dy_0}{d\rho_1} & \dfrac{dY_0}{d\rho_1} & Y_0 \\ \dfrac{dz_0}{d\rho_1} & \dfrac{dZ_0}{d\rho_1} & Z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

En ayant égard aux valeurs (1°) de X_0, Y_0, Z_0, cette dernière équation pourra s'écrire

$$(6^\circ)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(X_0 \frac{d^2x_0}{d\rho_1^2} + Y_0 \frac{d^2y_0}{d\rho_1^2} + Z_0 \frac{d^2z_0}{d\rho_1^2}\right)\left(\frac{dx_0}{d\rho_1}\frac{dx_0}{d\rho_2} + \frac{dy_0}{d\rho_1}\frac{dy_0}{d\rho_2} + \frac{dz_0}{d\rho_1}\frac{dz_0}{d\rho_2}\right) \\ &- \left(X_0 \frac{d^2x_0}{d\rho_1 d\rho_2} + Y_0 \frac{d^2y_0}{d\rho_1 d\rho_2} + Z_0 \frac{d^2z_0}{d\rho_1 d\rho_2}\right)\left[\left(\frac{dx_0}{d\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{d\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{dz_0}{d\rho_1}\right)^2\right] \end{aligned} \right\} = 0.$$

Or on tire des équations (2)

$$(7^\circ)\quad \left\{ \begin{aligned} &x_0 \frac{dx_0}{d\rho_1} = \frac{\rho_1(a^2 + \rho_2)}{b_1^2 c_1^2}, \qquad x_0 \frac{d^2x_0}{d\rho_1 d\rho_2} = \frac{\rho_1}{2 b_1^2 c_1^2}, \\ &x_0 \frac{dx_0}{d\rho_2} = \frac{\rho_1^2 - a^2}{2 b_1^2 c_1^2}, \qquad X_0 = \frac{1}{2 a_1^2 b_1^2 c_1^2} \frac{\rho_1}{y_0 z_0} (\rho_1^2 + A\rho_2 + b^2 c^2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

On constate immédiatement que

$$\frac{dx_0}{d\rho_1}\frac{dx_0}{d\rho_2} + \frac{dy_0}{d\rho_1}\frac{dy_0}{d\rho_2} + \frac{dz_0}{d\rho_1}\frac{dz_0}{d\rho_2} = 0,$$

ce qui est d'ailleurs visible *à priori;* et l'égalité (6°), à vérifier, devient, après la substitution des valeurs (7°) et quelques réductions immédiates,

$$(8^\circ)\qquad a_1^2 b_1^2 c_1^2 (\rho_1^2 - \rho_2^2) = 0.$$

Or la supposition $\rho_1^2 = \rho_2^2$ donne des points doubles de la surface Δ.

Ainsi les rayons du système ne peuvent pas être des tangentes prin-

cipales de la surface Δ; et, par conséquent, les courbes touchées sur cette surface par les rayons du système ne peuvent pas être des lignes de courbure de Δ.

Nous avons donc cette proposition :

Théorème VI. — *Les rayons du système forment une série de développables déterminées par les tangentes aux courbes $\rho_1 = const.$; ces courbes, intersections de la surface Δ avec les ellipsoïdes homofocaux $\rho_1 = const.$, sont des lignes de courbure pour les ellipsoïdes (ρ_1); elles seront d'une certaine espèce quand il s'agira de la nappe supérieure de Δ, et d'une autre espèce quand on passera à la nappe inférieure; mais elles ne sont pas des lignes de courbure pour la surface Δ.*

Les rayons du système ne sont jamais des tangentes principales pour la surface Δ.

15. Les surfaces développables, engendrées par les rayons du système, sont osculatrices à des courbes gauches du quatrième ordre, intersection de deux surfaces homofocales du second ordre, telles que

$$\rho_1 = r \quad \text{et} \quad \rho_2 = -r,$$

r étant une constante. Ces surfaces développables sont du huitième ordre et de douzième classe; elles possèdent donc les propriétés générales appartenant à cette variété de développables, propriétés signalées par MM. Chasles, Cayley, Salmon (*Comptes rendus*, t. LIV; 1862, etc.).

Cependant il n'est pas sans intérêt de chercher, dans le cas actuel, les équations, soit ponctuelles, soit tangentielles de ces surfaces développables, qui présentent ici des singularités qu'elles n'ont pas dans le cas général.

Cherchons d'abord les *équations tangentielles*.

Le plan osculateur en (x_0, y_0, z_0) à la courbe $\rho_1 = r$, touchée par les rayons du système, est le plan focal correspondant au foyer f_0, et, d'après l'équation (23, 1°), ses coordonnées u, v, w seront, après avoir fait $\rho_1 = r$,

$$(35)\qquad u = -x_0\frac{\rho^2 - a^2}{r^2 - a^2}, \quad v = -y_0\frac{\rho^2 - b^2}{r^2 - b^2}, \quad w = -z_0\frac{\rho^2 - c^2}{r^2 - c^2}.$$

on a, en outre,

$$(35\ bis)\quad \begin{cases} b_1^2 c_1^2 x_0^2 = (r^2 - a^2)(a^2 + \rho_2)^3, \\ c_1^2 a_1^2 y_0^2 = (r^2 - b^2)(b^2 + \rho_2)^3, \\ a_1^2 b_1^2 z_0^2 = (r^2 - c^2)(c^2 + \rho_2)^3. \end{cases}$$

On obtiendra les équations de la développable en éliminant ρ_2, x_0, y_0, z_0 entre ces six équations. Remplaçons d'abord, dans les équations (35), x_0, y_0, z_0 par leurs valeurs (35 *bis*), et posons, pour un instant,

$$(1^\circ)\quad U = (r^2 - a^2)u^2, \quad V = (r^2 - b^2)v^2, \quad W = (r^2 - c^2)w^2,$$

il vient

$$(2^\circ)\quad \begin{cases} a_1^2 b_1^2 c_1^2 U = a_1^2(\rho_2^3 + 3a^2\rho_2^2 + 3a^4\rho_2 + a^6), \\ a_1^2 b_1^2 c_1^2 V = b_1^2(\rho_2^3 + 3b^2\rho_2^2 + 3b^4\rho_2 + b^6), \\ a_1^2 b_1^2 c_1^2 W = c_1^2(\rho_2^3 + 3c^2\rho_2^2 + 3c^4\rho_2 + c^6); \end{cases}$$

il s'agit d'éliminer ρ_2 entre les trois équations (2°).

Ajoutons les équations (2°); ajoutons-les encore après les avoir respectivement multipliées par A, B, C, puis par b^2c^2, c^2a^2, a^2b^2; nous les remplacerons alors par le système suivant, relations (28), n° [**15**] :

$$(3^\circ)\quad \begin{cases} -3\rho_2 = U + V + W - e, \\ 3\rho_2^2 = AU + BV + CW - g, \\ -\rho_2^3 = b^2c^2U + c^2a^2V + a^2b^2W - h. \end{cases}$$

En désignant, pour un instant, par M, N, P les seconds membres des équations (3°), on a

$$3\rho_2 = M, \quad 3\rho_2^2 = N, \quad \rho_2^3 = P;$$

d'où l'on conclut

$$\rho_2 = \frac{M}{3}, \quad \rho_2 = \frac{N}{M}, \quad \rho_2 = \frac{3P}{N}.$$

ce qui donne les égalités de rapports

$$(4^\circ) \qquad \frac{M}{3} = \frac{N}{M} = \frac{3P}{N};$$

d'où résultent les trois équations

$$(4^\circ\ bis) \qquad M^2 - 3N = 0, \quad MN - 9P = 0, \quad N^2 - 3MP = 0.$$

En remplaçant M, N, P et U, V, W par leurs valeurs, on voit que *la développable exige, pour être définie complétement, sans solutions étrangères, les trois équations tangentielles* (4°).

Ces équations nous montrent que la développable est de douzième classe.

Remarque. — Si l'on veut étudier plus complétement cette développable, il sera préférable de conserver ρ_2 comme variable indépendante, et de définir les coordonnées d'un quelconque de ses plans tangents par les équations

$$(36) \quad b_1^2 c_1^2 u^2 = \frac{(a^2-\rho_2)^3}{r^2-a^2}, \quad c_1^2 a_1^2 v^2 = \frac{(b^2-\rho_2)^3}{r^2-b^2}, \quad a_1^2 b_1^2 w^2 = \frac{(c^2-\rho_2)^3}{r^2-c^2}.$$

Cherchons, en second lieu, l'*équation ponctuelle* de cette développable.

Les équations d'un rayon touchant la courbe $\rho_1 = r$ seront données par les équations (1) et (2), où l'on introduira l'hypothèse $\rho_1 = r$; on a ainsi

$$(37) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= x_0 + \frac{\lambda x_0}{a^2-\rho_1}, \\ y &= y_0 + \frac{\lambda y_0}{b^2-\rho_1}, \\ z &= z_0 + \frac{\lambda z_0}{c^2-\rho_1}; \end{aligned} \right.$$

$$(37\ bis) \qquad \left\{ \begin{aligned} b_1^2 c_1^2 x_0^2 &= (r^2 - a^2)(a^2 - \rho_2), \\ c_1^2 a_1^2 y_0^2 &= (r^2 - b^2)(b^2 - \rho_2), \\ a_1^2 b_1^2 z_0^2 &= (r^2 - c^2)(c^2 - \rho_2). \end{aligned} \right.$$

L'équation de la développable engendrée s'obtiendra en éliminant x_0, y_0, z_0, λ, ρ_2 entre ces six équations.

Si l'on pose $\lambda + \rho_2 = \mu$, les équations (37) donnent

$$x_0 = \frac{a^2 + \rho_2}{a^2 + \mu} x, \quad y_0 = \frac{b^2 + \rho_2}{b^2 + \mu} y, \quad z_0 = \frac{c^2 + \rho_2}{c^2 + \mu} z;$$

substituons ces valeurs dans les équations (37 *bis*), il vient

$$(1^\circ) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (a^2 + \mu)^2 + (a^2 + \rho_2)\,X = 0, \\ (b^2 + \mu)^2 + (b^2 + \rho_2)\,Y = 0, \\ (c^2 + \mu)^2 + (c^2 + \rho_2)\,Z = 0; \end{array} \right.$$

en posant pour un instant

$$(2^\circ) \qquad X = \frac{b_1^2 c_1^2}{a^4 - r^2} x^2, \quad Y = \frac{c_1^2 a_1^2}{b^4 - r^2} y^2, \quad Z = \frac{a_1^2 b_1^2}{c^4 - r^2} z^2.$$

Des équations (1°) on déduit, en éliminant ρ_2,

$$(3^\circ) \qquad \frac{(a^2 + \mu)^2 + a^2 X}{X} = \frac{(b^2 + \mu)^2 + b^2 Y}{Y} = \frac{(c^2 + \mu)^2 + c^2 Z}{Z};$$

on conclut de là, en comparant ces rapports,

$$\mu^2(Z - Y) + 2\mu(b^2 Z - c^2 Y) + b^4 Z - c^4 Y + a_1^2 YZ = 0,$$
$$\mu^2(X - Z) + 2\mu(c^2 X - a^2 Z) + c^4 X - a^4 Z + b_1^2 ZX = 0.$$

L'élimination de μ est maintenant facile ; si l'on remplace X, Y, Z par leurs valeurs (2°) et qu'on pose

$$(38) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Phi = a_1^4 (a^4 - r^2)\, y^2 z^2 + b_1^4 (b^4 - r^2)\, z^2 x^2 \\ \qquad + c_1^4 (c^4 - r^2)\, x^2 y^2 - K \left(\dfrac{A x^2}{a^4 - r^2} + \dfrac{B y^2}{b^4 - r^2} + \dfrac{C z^2}{c^4 - r^2} \right), \\ \Psi = a^2 a_1^4 (a^4 - r^2)\, y^2 z^2 + b^2 b_1^4 (b^4 - r^2)\, z^2 x^2 \\ \qquad + c^2 c_1^4 (c^4 - r^2)\, x^2 y^2 - K \left(\dfrac{b^2 c^2 x^2}{a^4 - r^2} + \dfrac{c^2 a^2 y^2}{b^4 - r^2} + \dfrac{a^2 b^2 z^2}{c^4 - r^2} \right), \\ P = K \left(\dfrac{x^2}{a^4 - r^2} + \dfrac{y^2}{b^4 - r^2} + \dfrac{z^2}{c^4 - r^2} \right), \end{array} \right.$$

où

$$K = (a^2 - r^2)(b^2 - r^2)(c^2 - r^2).$$

l'équation de la surface développable est

$$(39) \qquad \Phi^2 - 4P\Psi = 0.$$

Nous devons encore remarquer que les coordonnées d'un point quelconque de la surface développable s'expriment en fonction des deux paramètres arbitraires ρ et ρ_1 par les formules suivantes :

$$(40) \quad x^2 = \frac{(r^2 - a^2)(a^2 - \rho)(a^2 - \rho_1)}{b_1^2 c_1^2 a^2}, \quad y^2 = \frac{(r^2 - b^2)(b^2 - \rho)(b^2 - \rho_1)}{c_1^2 a_1^2 b^2}, \quad z^2 = \frac{(r^2 - c^2)(c^2 - \rho)(c^2 - \rho_1)}{a_1^2 b_1^2 c^2}.$$

Ces dernières formules résultent des égalités (1°) et (2°).

L'équation (39) met en évidence plusieurs propriétés de cette développable, qui est du huitième ordre et de la douzième classe.

1° L'origine, c'est-à-dire le centre de l'ellipsoïde donné, est un *point quadruple* quadriplanaire *isolé;* car les quatre plans tangents en ce point sont imaginaires.

2° Le cône des directions asymptotiques, ou cône directeur de la surface développable, est

$$(41) \quad a_1^4(a^2 - r^2)y^2z^2 + b_1^4(b^2 - r^2)z^2x^2 + c_1^4(c^2 - r^2)x^2y^2 = 0;$$

lorsqu'on fait varier r, c'est-à-dire lorsqu'on change l'arête de rebroussement de la développable, les cônes (41) passent constamment par les trois axes Ox, Oy, Oz, qui sont des arêtes doubles, et par les quatre droites imaginaires

$$(42) \qquad \frac{Ax^2}{a_1^2} = \frac{By^2}{b_1^2} = \frac{Cz^2}{c_1^2}.$$

Ces quatre directions ont un rôle particulier dans le système de rayons; remarquons de suite que, si l'on considère une de ces directions, par exemple

$$-\frac{a_1}{\sqrt{A}}, \quad \frac{b_1}{\sqrt{B}}, \quad \frac{c_1}{\sqrt{C}}$$

il y a une *infinité de rayons* parallèles à cette direction; tous ces rayons sont situés dans le plan

$$(43)\qquad a_1 x\sqrt{A} - b_1 y\sqrt{B} - c_1 z\sqrt{C} = 0.$$

De là nous concluons :

THÉORÈME VII. — *Les surfaces développables, engendrées par les rayons du système touchant les courbes déterminées sur la surface* Δ *par les ellipsoïdes* $\rho_1 =$ const., *sont des développables du huitième ordre et de douzième classe; elles possèdent, au centre* O *de la surface* Δ, *un point quadruple isolé quadriplanaire. Ces développables constituent un premier groupement naturel des rayons du système.*

Les cônes directeurs de ces développables ont les axes Ox, Oy, Oz *pour droites doubles, et, en outre, passent tous par les quatre droites fixes imaginaires*

$$(42)\qquad \frac{Ax^2}{a_1^2} = \frac{By^2}{b_1^2} = \frac{Cz^2}{c_1^2}.$$

Surface focale Σ.

16. Pour les foyers f_1, lesquels appartiennent à la surface que nous avons nommée Σ, on a (théorème III), n° [**9**],

$$\rho_1 d\rho_1 = \frac{F - \rho_2 E}{2D}\, d\rho_2 \quad \text{ou} \quad \frac{2\rho_1\, d\rho_1}{(\rho_1^2-\rho_2^2)(\rho_1^2+g) - 2\rho_2(e\rho_2^2+h)} = \frac{d\rho_2}{\rho_2^4+e\rho_2^2+g\rho_2+h},$$

dont l'intégrale est

$$(44)\qquad \varphi(\rho_1, \rho_2) = \rho_1^2 - \rho_2^2 + \frac{D}{\rho_2} - \text{const.} = 0.$$

Si à cette équation (44) on joint les équations (18), n° **7**, on aura, par l'élimination de ρ_1 et ρ_2, deux équations en x_1, y_1, z_1, qui détermineront une courbe tracée sur la surface focale Σ; désignons cette courbe par C_σ.

Pour la courbe C_σ, il y a un rayon infiniment voisin de R qui ren-

contre R (aux infiniment petits du second ordre près), et, par conséquent, lorsque le rayon R se déplace pour venir coïncider avec ce rayon infiniment voisin, il le fait en touchant la courbe C_σ; réciproquement, si le rayon R se déplace en touchant une courbe tracée sur la surface Σ, on devra avoir $\varphi(\rho_1, \rho_2) = 0$, puisque alors il doit rencontrer le rayon infiniment voisin.

Le plan osculateur en (x_1, y_1, z_1) à la courbe C_σ, touchée par les rayons du système, est le plan focal correspondant au foyer f_1, et, d'après l'équation (23) (2°), ses coordonnées sont

$$(45) \quad u = \frac{x_0(\rho_1^2 - A\rho_1 + b^2c^2)}{E}, \quad v = \frac{y_0(\rho_1^2 - B\rho_1 + c^2a^2)}{E}, \quad w = \frac{z_0(\rho_1^2 - C\rho_1 + a^2b^2)}{E},$$

x_0, y_0, z_0 ayant toujours les valeurs (2), n° **2**; seulement ρ_1 et ρ_2 sont ici liées par la relation (44).

Si l'on désigne par k la valeur de la constante arbitraire qui entre dans l'équation (44), qu'on ait égard aux valeurs (2), à la relation (44), et qu'on pose

$$(46) \qquad m = \frac{k - c}{k - a^2}, \quad n = \frac{k - c}{k - b^2}, \quad p = \frac{k - c}{k - c^2},$$

on trouve, après l'élimination de ρ_1 et ρ_2, entre (4), (44) et (45) :

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1^2 p w^2 - c_1^2 n v^2 = 1, \\ c_1^2 m u^2 - a_1^2 p w^2 = 1, \\ a_1^2 n v^2 - b_1^2 m u^2 = 1. \end{array} \right. \quad \text{d'où} \quad mu^2 + nv^2 + pw^2 = 0,$$

Les équations (47), qui forment un système de *deux équations distinctes*, sont les équations de la développable engendrée par les rayons du système qui touchent la courbe C_σ.

Cette surface est de quatrième classe et de huitième ordre; les quatre équations (47) définissent ses quatre lignes nodales.

Pour déterminer l'arête de rebroussement, c'est-à-dire la courbe C_σ, je me servirai des formules que j'ai établies dans mon *Mémoire sur la détermination de l'arête de rebroussement d'une surface développable définie par ses équations tangentielles* (*Journal de Mathématiques pures*

et appliquées, année 1872, p. 187; on trouve ainsi, pour les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de l'arête de rebroussement,

$$(48)\qquad \begin{cases} x = m^2 b_1^2 c_1^2 u^3, \\ y = n^2 c_1^2 a_1^2 v^3, \\ z = -p^2 a_1^2 b_1^2 w^3. \end{cases}$$

k est une constante arbitraire déterminant une courbe individuelle C_σ et la surface développable osculatrice correspondante; m, n, p sont définis par les égalités (46); les variables u, v, w sont liées par les équations (47), qui forment un système de deux équations distinctes.

Pour obtenir le lieu des courbes C_σ, c'est-à-dire la seconde surface focale Σ, il suffit d'éliminer m, n, p, u, v, w, k entre les huit équations (46), (47), (48); le calcul n'offre pas de difficultés sérieuses, et l'on arrive bien ainsi, comme nous l'avons fait, à l'équation de la surface focale Σ, que nous retrouverons plus loin par une méthode beaucoup plus simple.

17. Nous résumerons dans la proposition suivante les propriétés fondamentales établies dans ce premier paragraphe :

Théorème VIII. — *Le système de rayons que nous étudions admet deux surfaces focales distinctes :* Δ (*première surface focale*) *et* Σ (*seconde surface focale*). (Théorème I, n° 7.)

Considérons un rayon quelconque (R) *du système et ses deux foyers* f_0 *et* f_1, *qui sont les points où il touche respectivement les deux surfaces focales* Δ *et* Σ; *les rayons du système touchent, sur la surface* Δ, *les courbes définies par l'équation*

$$d\rho_1 = 0 \quad ou \quad \rho_1 = \text{const.};$$

et, sur la surface Σ, *les courbes définies par l'équation*

$$\rho_1 d\rho_1 = \frac{F + \rho_2 E}{D} d\rho_2, \quad ou \quad \rho_1^2 - \rho_2^2 - \frac{D}{\rho_2 + \text{const.}} = 0.$$

Le plan focal correspondant au foyer f_0 *touche la surface focale* Σ *en* f_1 *et est osculateur en* f_0 *à la courbe que les rayons du système*

touchent sur Δ *et qui passe par* f_0; *le plan focal correspondant au foyer* f_1 *touche la surface focale* Δ *en* f_0 *et est osculateur en* f_1 *à la courbe que les rayons du système touchent sur* Σ *et qui passe par* f_1. (Théorème III, nº **9**.)

Les surfaces développables engendrées par les rayons du système touchant les courbes déterminées sur la surface Δ *par les surfaces* $\rho_1 = \text{const.}$ *sont des développables du huitième ordre et de douzième classe* (théorème VII, nº **15**); *les plans tangents à cette développable touchent en même temps la seconde surface focale* Σ.

Les surfaces développables engendrées par les rayons du système touchant les courbes déterminées sur la surface Σ *par les surfaces* $\rho_1^2 - \rho_2^2 + \frac{D}{\rho_1 \pm \text{const.}} = 0$ *sont des développables du huitième ordre et de quatrième classe* (nº **16**); *les plans tangents à cette développable touchent en même temps la première surface focale* Δ. *Les quatre lignes nodales de ces dernières surfaces sont dans les plans* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$ [équations (47)].

Ajoutons cette remarque que :

Les rayons du système étudié ne peuvent pas être les normales à une même surface.

Cette proposition se démontre immédiatement et de plusieurs manières.

§ II. Détermination des surfaces focales. Discussion.

18. Les droites qui composent le système de rayons que nous étudions sont définies par les équations

$$(1)\quad \begin{cases} x = x_0 + \lambda \dfrac{x_0}{a^2 - \rho_2}, \\ y = y_0 + \lambda \dfrac{y_0}{b^2 - \rho_2}; \\ z = z_0 + \lambda \dfrac{z_0}{c^2 - \rho_2}; \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} b_1^2 c_1^2 x_0^2 = (\rho_1^2 - a^4)(a^2 - \rho_2), \\ c_1^2 a_1^2 y_0^2 = (\rho_1^2 - b^4)(b^2 + \rho_2), \\ a_1^2 b_1^2 z_0^2 = (\rho_1^2 - c^4)(c^2 - \rho_2); \end{cases}$$

x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées du point où le rayon touche la surface Δ, ou première *surface focale*; c'est le premier foyer f_0.

Cherchons d'abord les rayons qui passent par un point (x', y', z') arbitrairement donné; pour cela, nous déterminerons les cônes ayant pour sommet commun le point donné et qui se coupent suivant les rayons cherchés.

Les équations d'un rayon peuvent s'écrire

$$(3)\quad \begin{cases} x = x' + \mu\alpha, \\ y = y' + \mu\beta, \\ z = z' + \mu\gamma; \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad (3\ bis)\quad \begin{cases} \gamma y - \beta z = \gamma y' - \beta z', \\ \alpha z - \gamma x = \alpha z' - \gamma x', \\ \beta x - \alpha y = \beta x' - \alpha y'. \end{cases}$$

La droite (3) appartient d'abord au cône du complexe ayant son sommet au point (x', y', z'), c'est-à-dire, d'après l'équation (4), [[n° 4]], au cône

$$(4)\quad \begin{cases} (y'z - z'y)^2 + (z'x - x'z)^2 + (x'y - y'x)^2 \\ \qquad = A(x - x')^2 + B(y - y')^2 + C(z - z')^2. \end{cases}$$

En remplaçant x, y, z par leurs valeurs (3), cette dernière équation deviendra

$$(5)\quad (\gamma y' - \beta z')^2 + (\alpha z' - \gamma x')^2 + (\beta x' - \alpha y')^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2.$$

Les équations (3 *bis*), qui réprésentent le rayon (1), devront être vérifiées par les valeurs (1) de x, y, z, quel que soit λ, ce qui donne

$$(1^\circ)\quad \begin{cases} \gamma y_0 - \beta z_0 = \gamma y' - \beta z', \\ \alpha z_0 - \gamma x_0 = \alpha z' - \gamma x', \\ \beta x_0 - \alpha y_0 = \beta x' - \alpha y'; \end{cases} \qquad (2^\circ)\quad \frac{x_0}{\alpha(a + \rho_1)} = \frac{y_0}{\beta(b + \rho_1)} = \frac{z_0}{\gamma(c + \rho_1)} = \theta;$$

en substituant les valeurs (2°) de x_0, y_0, z_0 dans les égalités (1°), nous obtenons

$$(3^\circ)\quad \begin{cases} a_1^2\beta\gamma.\theta = \gamma y' - \beta z', \\ b_1^2\gamma\alpha.\theta = \alpha z' - \gamma x', \\ c_1^2\alpha\beta.\theta = \beta x' - \alpha y'. \end{cases}$$

Si l'on multiplie ces dernières équations par x', y', z' et qu'on ajoute,

on a la seconde équation suivante entre α, β, γ :

$$(6) \qquad a_1^2 x'\beta\gamma + b_1^2 y'\gamma\alpha + c_1^2 z'\alpha\beta = 0.$$

Ainsi :

Théorème IX. — *Les rayons du système menés par le point* (x', y', z') *arbitrairement choisi sont définis par les deux équations*

$$(7) \quad \begin{cases} a_1^2 x'\beta\gamma + b_1^2 y'\gamma\alpha + c_1^2 z'\alpha\beta = 0, \\ (\gamma y' - \beta z')^2 + (\alpha z' - \gamma x')^2 + (\beta x' - \alpha y')^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2, \end{cases}$$

et les équations du rayon sont

$$(7\ bis) \quad \begin{cases} x = x' + \mu\alpha, \\ y = y' + \mu\beta, \\ z = z' + \mu\gamma; \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} \gamma y - \beta z = \gamma y' - \beta z', \\ \alpha z - \gamma x = \alpha z' - \gamma x', \\ \beta x - \alpha y = \beta x' - \alpha y', \end{cases}$$

μ étant une constante arbitraire.

En remplaçant α, β, γ par les valeurs déduites des équations (7 bis), les équations (7) s'écriront

$$(8) \quad \begin{cases} a_1^2 x'(y - y')(z - z') + b_1^2 y'(z - z')(x - x') \\ \qquad\qquad + c_1^2 z'(x - x')(y - y') = 0, \\ (y'z - z'y)^2 + (z'x - x'z)^2 + (x'y - y'x)^2 \\ \qquad = A(x - x')^2 + B(y - y')^2 + C(z - z')^2. \end{cases}$$

Les rayons du système passant par le point (x', y', z') sont les intersections des deux cônes (8) ayant leur sommet en ce point. La seconde des équations (8) représente le cône du complexe ayant son sommet au point (x', y', z'); la première des équations (8) représente le cône sur lequel sont les normales menées du point (x', y', z') à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, ou encore le cône sur lequel sont situées les droites qui, passant par le point (x', y', z'), sont en même temps perpendiculaires à leurs conjuguées par rapport à ce même ellipsoïde.

Remarque. — Le point (x', y', z') étant donné, les inconnues α, β, γ

seront données par les équations (7) : la quantité ζ aura pour valeur

$$(9)\qquad \zeta^2(a_1^4\beta^2\gamma^2 + b_1^4\gamma^2\alpha^2 + c_1^4\alpha^2\beta^2) = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2;$$

les quantités ρ_1 et ρ_2, correspondant au rayon (α, β, γ), seront fournies par les équations

$$(10)\qquad \begin{cases} \rho_2(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2) = (Aa^2\alpha^2 + Bb^2\beta^2 + Cc^2\gamma^2), \\ \rho_1^2(a_1^4\beta^2\gamma^2 + b_1^4\gamma^2\alpha^2 + c_1^4\alpha^2\beta^2) \\ \qquad = a_1^4a^4\beta^2\gamma^2 + b_1^4b^4\gamma^2\alpha^2 + c_1^4c^4\alpha^2\beta^2. \end{cases}$$

Les coordonnées du foyer f_0 seront alors

$$(11)\qquad \frac{x_0}{\alpha(a^2 - \rho_2)} = \frac{y_0}{\beta(b^2 - \rho_2)} = \frac{z_0}{\gamma(c^2 - \rho_2)} = \zeta;$$

celles du foyer f_1 et des points limites seront ensuite fournies par les équations (18) et (31) du premier paragraphe.

19. Cherchons, en second lieu, les rayons du système qui se trouvent dans un plan donné (u', v', w').

Nous pouvons écrire les *équations tangentielles* d'une droite quelconque située dans le plan donné (u', v', w') sous la forme suivante :

$$(12)\qquad \frac{u - u'}{\alpha'} = \frac{v - v'}{\beta'} = \frac{w - w'}{\gamma'},$$

et si l'on pose

$$(13)\qquad U = v'\gamma' - w'\beta', \quad V = w'\alpha' - u'\gamma', \quad W = u'\beta' - v'\alpha',$$

les *équations ponctuelles* de cette même droite seront

$$(12\ bis)\qquad \begin{cases} Vz - Wy = \alpha', \\ Wx - Uz = \beta', \\ Uy - Vx = \gamma'. \end{cases}$$

Écrivons que cette droite est un rayon, c'est-à-dire que les équa-

tions (12 *bis*) sont vérifiées, quel que soit λ, par les valeurs (1) de x, y, z; on a

$$(1^\circ)\quad \begin{cases} V z_0 - W y_0 = \alpha', \\ W x_0 - U z_0 = \beta', \\ U y_0 - V x_0 = \gamma'; \end{cases} \qquad (2^\circ)\quad \frac{x_0}{U(a^2-\rho_1)} = \frac{y_0}{V(b^2-\rho_1)} = \frac{z_0}{W(c^2-\rho_1)} = \varepsilon.$$

En transportant les valeurs (2°) dans les égalités (1°), il vient

$$(3^\circ)\quad \begin{cases} \varepsilon a_1^2 VW = \alpha', \\ \varepsilon b_1^2 WU = \beta', \\ \varepsilon c_1^2 UV = \gamma'; \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad (4^\circ)\quad \begin{cases} \varepsilon^2 b_1^2 c_1^2 U^2 VW = \beta'\gamma', \\ \varepsilon^2 c_1^2 a_1^2 UV^2 W = \gamma'\alpha', \\ \varepsilon^2 a_1^2 b_1^2 UVW^2 = \alpha'\beta'. \end{cases}$$

Ajoutons les équations (4°) respectivement multipliées par $a_1^2 u'$, $b_1^2 v'$, $c_1^2 w'$, nous trouvons

$$(14)\qquad a_1^2 u'\beta'\gamma' + b_1^2 v'\alpha'\gamma' + c_1^2 w'\alpha'\beta' = 0;$$

c'est là une première relation que doivent vérifier les quantités α', β', γ'.

D'ailleurs la droite doit toucher la conique (Γ) du complexe située dans le plan (u', v', w'); on a donc, d'après l'équation (3), [[n° **3**]],

$$(15)\qquad \begin{cases} A(v'w - w'v)^2 + B(w'u - u'w)^2 + C(u'v - v'u)^2 \\ \qquad = (u - u')^2 + (v - v')^2 + (w - w')^2. \end{cases}$$

On peut introduire, dans cette équation (15), les quantités α', β', γ', en y remplaçant u, v, w par les valeurs (12); on trouve ainsi

$$(16)\quad A(v'\gamma' - w'\beta')^2 + B(w'\alpha' - u'\gamma')^2 + C(u'\beta' - v'\alpha')^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2.$$

On a donc cette seconde proposition :

Théorème X. — *Les rayons du système situés dans le plan (u', v', w') arbitrairement choisis sont définis par les deux équations*

$$(17)\quad \begin{cases} a_1^2 u'\beta'\gamma' + b_1^2 v'\gamma'\alpha' + c_1^2 w'\alpha'\beta' = 0, \\ A(v'\gamma' - w'\beta')^2 + B(w'\alpha' - u'\gamma')^2 + C(u'\beta' - v'\alpha')^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2, \end{cases}$$

et les équations du rayon sont

$$(18)\qquad \frac{u-u'}{\alpha'}=\frac{v-v'}{\beta'}=\frac{w-w'}{\gamma'}\quad \text{(équations tangentielles)},$$

$$(18\ bis)\qquad \left\{\begin{array}{l} Vz-Wy=\alpha',\\ Wx-Uz=\beta',\\ Uy-Vx=\gamma'. \end{array}\right\}\quad \text{(équations ponctuelles)},$$

U, V, W *étant définis par les égalités* (13).

En remplaçant α', β', γ' *par leurs valeurs* (18), *les équations* (17) *s'écriront*

$$(19)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1^2 u'(v-v')(w-w')+b_1^2 v'(w-w')(u-u')\\ \qquad\qquad +c_1^2 w'(u-u')(v-v')=0,\\ A(v'w-w'v)^2+B(w'u-u'w)^2+C(u'v-v'u)^2\\ \qquad =(u-u')^2+(v-v')^2+(w-w')^2. \end{array}\right.$$

Les rayons du système situés dans le plan donné (u', v', w') *sont les tangentes communes aux deux coniques* (19). *La seconde des équations* (19) *représente la conique du complexe située dans le plan* (u', v', w'); *la première de ces équations définit la conique que doivent toucher toutes les droites situées dans le plan* (u', v', w'), *qui sont en même temps perpendiculaires à leurs conjuguées par rapport à l'ellipsoïde* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$.

Remarque. — Le plan (u', v', w') étant donné, les inconnues α', β', γ' seront déterminées par les équations (17); la quantité ε sera donnée par l'équation

$$(20)\qquad \varepsilon^2(a_1^4 V^2W^2+b_1^4 W^2U^2+c_1^4 U^2V^2)=\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2,$$

où U, V, W ont les valeurs (13).

Les paramètres ρ_1 et ρ_2, correspondant au rayon $(\alpha', \beta', \gamma')$, seront fournis par les relations

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{l} \rho_2(AU^2+BV^2+CW^2)+a^2AU^2+b^2BV^2+c^2CW^2=0,\\ \rho_1^2(a_1^4V^2W^2+b_1^4W^2U^2+c_1^4U^2V^2)\\ \qquad =a^4a_1^4V^2W^2+b^4b_1^4W^2U^2+c^4c_1^4U^2V^2; \end{array}\right.$$

les coordonnées du foyer f_0 seront alors

$$(22) \qquad \frac{x_0}{\mathrm{U}(a^2-\rho_0)} = \frac{y_0}{\mathrm{V}(b^2-\rho_0)} = \frac{z_0}{\mathrm{W}(c^2-\rho_0)};$$

les formules (18) et (31) du premier paragraphe donneront ensuite les coordonnées du second foyer et celles des points limites.

20. Les équations (7) et (17) mettent en évidence cette double proposition :

Théorème XI. — *Par un point arbitrairement choisi passent quatre rayons du système; dans un plan arbitrairement choisi se trouvent quatre rayons du système. Le système des rayons en question est donc du quatrième ordre et de la quatrième classe.*

Il importe maintenant de discuter la situation de ces rayons suivant la position du point d'où ils sont issus ou du plan qui les contient.

1° *Rayons passant par un point donné.*

21. Les directions (α, β, γ) des rayons passant par le point donné (x', y', z') sont déterminées par les deux équations (théorème IX, n° **18**)

$$(23) \quad \begin{cases} a_1^2 x'\beta\gamma + b_1^2 y'\gamma\alpha + c_1^2 z'\alpha\beta = 0, \\ \alpha^2(y'^2+z'^2-\mathrm{A}) + \beta^2(z'^2+x'^2-\mathrm{B}) + \gamma^2(x'^2+y'^2-\mathrm{C}) \\ \qquad -2y'z'\beta\gamma - 2z'x'\gamma\alpha - 2x'y'\alpha\beta = 0. \end{cases}$$

Pour discuter les solutions que fournissent les équations (23), nous assimilerons ces deux équations, homogènes en α, β, γ, à celles de deux coniques; α, β, γ seront les coordonnées variables. Remarquons de suite que la seconde des équations (23) n'est autre que l'ensemble des termes du second degré de l'équation du cône (C) du complexe n° [[**6**]], où l'on mettrait α, β, γ au lieu de x, y, z, et x', y', z' au lieu de x_0, y_0, z_0.

L'équation générale des coniques passant par les points communs

aux coniques (23) est

$$(24)\quad \begin{cases} \alpha^2(y'^2 + z'^2 - A) + \beta^2(z'^2 + x'^2 - B) + \gamma^2(x'^2 + y'^2 - C) \\ \quad - 2(y'z' + \lambda a_1^2 x')\beta\gamma - 2(z'x' + \lambda b_1^2 y')\gamma\alpha - 2(x'y' + \lambda c_1^2 z')\alpha\beta = 0, \end{cases}$$

et l'équation en λ correspondante est

$$\begin{vmatrix} y'^2 + z'^2 - A & -(x'y' + \lambda c_1^2 z') & -(x'z' + \lambda b_1^2 y') \\ -(y'x' + \lambda c_1^2 z') & z'^2 + x'^2 - B & -(y'z' + \lambda a_1^2 x') \\ -(z'x' + \lambda b_1^2 y') & -(y'z' + \lambda a_1^2 x') & x'^2 + y'^2 - C \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant et supprimant les accents de x', y', z',

$$(25)\qquad 2a_1^2 b_1^2 c_1^2 xyz\lambda^3 + \Theta\lambda^2 + \Delta = 0,$$

après avoir posé

$$(26)\quad \begin{cases} \Theta = a_1^4 y^2 z^2 + b_1^4 z^2 x^2 + c_1^4 x^2 y^2 - (Aa_1^4 x^2 + Bb_1^4 y^2 + Cc_1^4 z^2), \\ \Delta = (x^2 + y^2 + z^2)(Ax^2 + By^2 + Cz^2) \\ \qquad - [A(B + C)x^2 + B(C + A)y^2 + C(A + B)z^2] + ABC. \end{cases}$$

Nous poserons encore

$$(27)\qquad \Sigma = \Theta^3 + 27a_1^4 b_1^4 c_1^4 x^2 y^2 z^2 \Delta.$$

Toute la discussion repose sur la nature des racines de l'équation en λ.

22. Avant d'aborder l'examen des différents cas, nous devons faire plusieurs remarques.

Remarque I. — Lorsque $\lambda = 0$ est une racine de l'équation (25), l'équation (24), qui représente le système des sécantes communes aux deux coniques (23), se réduit à la seconde des équations (23); or le premier membre de cette équation (23) n'est autre que l'ensemble des termes du second degré de l'équation du cône du complexe, et cet ensemble de termes représente :

Un cône proprement dit, si (x, y, z) n'est pas un point de la surface Δ;

Un système de deux plans distincts, si (x, y, z) est un point de la surface Δ ;

Un système de deux plans coïncidents, si (x, y, z) est un point double de Δ.

Il résulte de là que, pour $\lambda = 0$, l'équation (24) ne représentera jamais un système de deux droites coïncidentes, à moins que le point (x, y, z) ne soit un point double de la surface Δ.

Remarque II. — La courbe du seizième ordre

$$\Theta = 0, \quad \Delta = 0$$

est imaginaire, sauf aux points doubles réels de Δ.

Remarque III. — La surface Σ, dont l'équation est

$$(28) \qquad \Sigma = \Theta^3 - 27 a_1^2 b_1^2 c_1^2 x^2 y^2 z^2 \Delta = 0,$$

et qui doit jouer un rôle important, puisqu'elle est la deuxième surface focale du système, comme nous allons le voir, possède un grand nombre de propriétés; nous énoncerons de suite les suivantes :

THÉORÈME XII. — *La surface Σ est du douzième ordre et de douzième classe.*

L'origine O est un point sextuple pour lequel l'équation du cône tangent est

$$(29) \qquad a_1 (A a_1 x^2)^{\frac{1}{3}} + b_1 (B b_1 y^2)^{\frac{1}{3}} + c_1 (C c_1 z^2)^{\frac{1}{3}} = 0.$$

Le cône des directions asymptotiques se compose de trois cônes confondus avec le cône

$$(30) \qquad a_1^4 y^2 z^2 + b_1^4 z^2 x^2 + c_1^4 x^2 y^2 = 0.$$

La surface Σ touche la surface Δ suivant la courbe (imaginaire)

$$\Theta = 0, \quad \Delta = 0,$$

et les tangentes inflexionnelles de Δ (ou asymptotes de l'indicatrice) aux différents points de cette courbe sont également des tangentes inflexionnelles pour Σ.

Les quatre courbes planes (la dernière est à l'infini)

$$(31)\qquad \begin{cases} x = 0, \\ \Theta = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ \Theta = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0, \\ \Theta = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} t = 0, \\ \Theta = 0 \end{cases}$$

sont des courbes doubles pour la surface Σ, et les tangentes proprement dites à la surface en chacun des points de la courbe considérée sont dans le plan même de la courbe.

Le plan polaire d'un point quelconque (x, y, z), par rapport à la surface Σ, passe toujours par le point où les plans polaires de (x, y, z), par rapport aux surfaces Θ et Δ, se rencontrent avec le plan polaire du même point (x, y, z) par rapport au tétraèdre $(x = 0, y = 0, z = 0, t = 0)$, $t = 0$ représentant le plan de l'infini.

Les coordonnées d'un point quelconque de la surface Σ sont données, en fonction des deux paramètres arbitraires ρ_1 et ρ_2, par les formules (n° 7)

$$(32)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{x_0(\rho_1^2 - a^2)(A\rho_2 - bc^2)}{(a^2 - \rho_2)E}, \\[2ex] y = \dfrac{y_0(\rho_1^2 - b^2)(B\rho_2 - ca^2)}{(b^2 - \rho_2)E}, \\[2ex] z = \dfrac{z_0(\rho_1^2 - c^2)(C\rho_2 - ab^2)}{(c^2 - \rho_2)E}, \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} b_1^2 c_1^2 x_0^2 = (\rho_1^2 - a^2)(a^2 - \rho_2), \\ c_1^2 a_1^2 y_0^2 = (\rho_1^2 - b^2)(b^2 - \rho_2), \\ a_1^2 b_1^2 z_0^2 = (\rho_1^2 - c^2)(c^2 - \rho_2), \\ E = \rho_2(\rho_1^2 - g) - e\rho_1^2 - h. \end{cases}$$

Le plan tangent en ce point est déterminé par l'équation (théorème III)

$$(33)\qquad x x_0 \frac{a^2 - \rho_2}{\rho_1^2 - a^2} + y y_0 \frac{b^2 - \rho_2}{\rho_1^2 - b^2} + z z_0 \frac{c^2 - \rho_2}{\rho_1^2 - c^2} + 1 = 0.$$

Toutes les parties de cette proposition s'établissent aisément; pour plusieurs d'entre elles, il suffit d'écrire les équations du plan polaire et de la quadrique polaire d'un point par rapport à la surface Σ.

25. Nous pouvons passer maintenant à l'examen des différents cas qui peuvent se présenter d'après la nature des racines de l'équation (25).

PREMIER CAS : $\Delta . \Sigma < 0$.

L'équation (25) en λ ayant alors ses trois racines réelles, les coniques (23) se coupent en quatre points réels ou en quatre points imaginaires.

DEUXIÈME CAS : $\Delta . \Sigma > 0$.

L'équation (25) en λ ayant une seule racine réelle, les coniques (23) se coupent en deux points réels et deux points imaginaires.

Par conséquent :

THÉORÈME XIII. — *Si* $\Delta . \Sigma < 0$, *les quatre rayons passant par le point* (x, y, z) *sont ou tous quatre réels ou tous quatre imaginaires; si* $\Delta . \Sigma > 0$, *parmi les quatre rayons passant par le point* (x, y, z), *deux sont réels et les deux autres imaginaires.*

TROISIÈME CAS : $\Delta . \Sigma = 0$.

L'équation (25) en λ admet alors une racine double, et les deux coniques (23) sont ou simplement tangentes ou doublement tangentes, suivant que le système (24) des sécantes communes correspondant à la racine double se compose de deux droites distinctes ou de deux droites coïncidentes.

Le cas actuel donne lieu à deux hypothèses :

1° $\Delta = 0$. — L'équation (25) a deux racines nulles; les deux coniques (23) sont donc tangentes, et elles le sont en un seul point, car le système des sécantes (24) se compose de deux droites distinctes (remarque I, n° **22**). Ainsi :

THÉORÈME XIV. — *Parmi les quatre rayons qui sont issus de chaque point* M *de la surface* Δ, *il y en a deux qui se confondent avec celui qui touche la surface* Δ *en* M; *les deux autres rayons sont distincts entre eux et distincts du premier, ils touchent la nappe de* Δ *sur laquelle ne se trouve pas le point* M; *ils sont donc réels ou imaginaires, suivant que le point* M *appartient à la nappe supérieure ou à la nappe inférieure.*

La surface Δ *est la* PREMIÈRE SURFACE FOCALE *du système de rayons.*

Pour les points de la surface Δ, le cône du complexe se réduit à deux plans dont l'intersection est précisément le double rayon touchant Δ en ce point, n° [[9]].

2° $\Sigma = 0$. — L'équation (25) a encore deux racines égales, et l'équation (24) représente, en général, deux droites distinctes; ainsi, parmi les rayons issus du point (x, y, z), il y en a deux qui coïncident. Le cône du complexe, ayant son sommet au point (x, y, z), touche la surface Δ en un certain point; car les quatre rayons issus d'un point appartiennent au cône du complexe ayant son sommet en ce point, et ce sont les seules génératrices du cône qui touchent Δ; or, si deux de ces génératrices viennent se confondre, le cône deviendra évidemment tangent au point où cette double droite touche Δ.

Si l'on exprime que l'équation (24) représente deux droites confondues, on obtient alors un système de relations équivalant à deux équations distinctes, qui définissent une courbe tracée sur la surface Σ; le cône du complexe, ayant son sommet en un quelconque des points de cette courbe, touche la surface Δ en deux points. Ainsi :

Théorème XV. — *La surface Σ est le lieu des points d'où partent deux rayons confondus; elle est donc la* SECONDE SURFACE FOCALE *du système de rayons.*

Mais cette dernière surface a, par rapport au COMPLEXE, *un rôle différent de celui de la première; car, pour les points de Σ, les cônes du complexe sont des cônes proprement dits; ces cônes touchent alors la surface Δ en un point. Il y a, en outre, sur la surface Σ une courbe lieu des sommets des cônes du complexe qui touchent en deux points la surface Δ.*

Quatrième cas : $\Delta = 0$, $\Theta = 0$.

L'équation (25) admet alors trois racines nulles; les deux coniques (23) ont trois de leurs points d'intersection confondus, et trois seulement d'après la remarque I, n° 22. Pour les points de la courbe $(\Delta = 0, \Theta = 0)$, trois des rayons issus coïncident et le quatrième est distinct; en ces points, le triple rayon est une tangente inflexionnelle pour les surfaces Δ et Σ.

En effet, les coordonnées x_0, y_0, z_0 d'un point quelconque de la

surface Δ sont, n° [[11]],

$$b_1 c_1 x_0^2 = \rho_1^2 - a^2(a^2 - \rho_2),$$
$$c_1 a_1 y_0^2 = \rho_1^2 - b^2(b^2 - \rho_2),$$
$$a_1 b_1 z_0^2 = \rho_1^2 - c^2(c^2 - \rho_2),$$

et si l'on substitue ces valeurs dans l'expression (26) de Θ, on trouve

$$(34) \qquad \Theta_0 = (F - \rho_2 E);$$

or ceci est précisément le coefficient de λ^2 dans l'équation (33) du n° [[13]]. De là résulte la propriété énoncée. On constate encore, à l'aide de la formule (18), 3°, n° **7**, que les deux foyers coïncident. Donc :

Théorème XVI. — *La courbe (imaginaire) $\Delta = 0$, $\Theta = 0$ est le lieu des points pour lesquels trois des rayons issus coïncident; elle est aussi le lieu des points pour lesquels les rayons sont des tangentes inflexionnelles pour les deux surfaces Δ et Σ. Le cône du complexe, ayant son sommet en un de ces points, se réduit à deux plans distincts.*

24. Il nous reste maintenant à étudier les *points singuliers* du système de rayons, c'est-à-dire la distribution des rayons correspondant aux points remarquables des surfaces focales.

Les formules établies précédemment donnent immédiatement la réponse à cette question; pour abréger, nous supprimerons les détails de ce calcul, qui n'offre pas la plus légère difficulté; nous nous contenterons d'énoncer les résultats auxquels il conduit.

Théorème XVII. — 1° *Lorsque le point* M(x, y, z) *se trouve sur une des courbes doubles (à distance finie)*

$$\begin{cases} x = 0, \\ \Theta = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0, \\ \Theta = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 0, \\ \Theta = 0 \end{cases}$$

de la surface Σ, parmi les rayons issus de ce point, trois se confondent avec une des tangentes menées de ce point à l'ellipse section de la surface Δ par le plan de la courbe double; le quatrième rayon est la seconde tangente à cette même ellipse.

Les points limites du rayon correspondant à la solution triple coïncident respectivement avec les foyers relatifs à ce rayon.

Le cône du complexe ayant pour sommet le point M *touche la surface* Δ *au point où elle est touchée par le triple rayon; le plan tangent est perpendiculaire au plan de symétrie qui renferme la courbe double considérée.*

2° *Pour les points situés sur la courbe double plane à l'infini* ($t = 0$, $\Theta = 0$) *de la surface* Σ, *les quatre rayons issus d'un de ces points sont à l'infini et situés dans les plans asymptotes du cylindre du complexe correspondant au point considéré; trois de ces rayons se trouvent dans le plan asymptote, qui est en même temps tangent au cône* ($x^2 + y^2 + z^2 = 0$) *des directions asymptotiques de la sphère.*

3° *Si l'on considère un point à l'infini sur une direction quelconque* (α_0, β_0, γ_0), *parmi les rayons issus de ce point, deux sont toujours à l'infini; les deux autres sont à distance finie situés dans le plan*

$$\frac{a_1^2 x}{\cos\alpha_0} + \frac{b_1^2 y}{\cos\beta_0} + \frac{c_1^2 z}{\cos\gamma_0} = 0,$$

et touchent la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = A\cos^2\alpha_0 + B\cos^2\beta_0 + C\cos^2\gamma_0.$$

4° *Pour chacun des points doubles, à distance finie, de la surface* Δ (*lesquels points doubles sont situés sur les courbes doubles à distance finie de la surface* Σ), *il y a une infinité de rayons du système issus de ce point; ces rayons sont situés dans un même plan, qui touche le cône tangent à la surface* Δ *au point double considéré.*

5° *Pour chacun des points doubles à l'infini sur* Δ [*lesquels appartiennent à la courbe double* ($t = 0$, $\Theta = 0$) *de* Σ] *et dont les directions sont les intersections des deux cônes*

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 0, \\ Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0, \end{array}\right. \qquad \textit{ou} \qquad (35\ \textit{bis})\quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = \frac{z^2}{c_1^2},$$

il y a une infinité de rayons du système issus de ce point; ces rayons sont situés dans un même plan, qui touche le cône ($x^2 + y^2 + z^2 = 0$)

suivant la direction considérée. Les droites (35 *bis*) *appartiennent également au cône des directions asymptotiques de la surface* Σ, *savoir :*

$$(36) \qquad a_1 y^2 z^2 + b_1 z^2 x^2 + c_1 x^2 y^2 = 0,$$

et le cône (36) *touche le premier des cônes* (35) *suivant les quatre droites* (35 *bis*).

6° *Pour chacun des points à l'infini situés sur les directions asymptotiques communes aux surfaces* Δ *et* Σ *et distinctes des précédentes, lesquelles directions sont les intersections des deux cônes*

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0, \\ a_1 y^2 z^2 + b_1 z^2 x^2 + c_1 x^2 y^2 = 0, \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad (37 \text{ bis}) \quad \frac{Ax^2}{a_1} = \frac{By^2}{b_1} = \frac{Cz^2}{c_1},$$

il y a une infinité de rayons du système issus de ce point; ces rayons sont situés dans un même plan, qui touche le cône ($Ax^2+By^2+Cz^2=0$) *suivant la direction considérée. Les droites* (37 *bis*) *appartiennent également au cône tangent à la surface* Σ *en son point sextuple, savoir :*

$$(38) \qquad a_1 (A a_1 x^2)^{\frac{1}{3}} + b_1 (B b_1 y^2)^{\frac{1}{3}} + c_1 (C c_1 z^2)^{\frac{1}{3}} = 0,$$

et le cône (38) *touche le premier des cônes* (37) *suivant les quatre droites* (37 *bis*).

7° *Pour le point sextuple de* Σ, *il y a une infinité de rayons issus de ce point; ces rayons forment le cône du second ordre* ($Ax^2+By^2+Cz^2=0$).

Remarquons que les deux cônes (35) *constituent le cône des directions asymptotiques de la surface* Δ.

8° *Pour les points à l'infini sur les axes* Ox, Oy, Oz, *il y a une infinité de rayons issus de chacun de ces points; ces rayons forment un cylindre de révolution.*

Ainsi, pour le point à l'infini sur Ox, *les rayons forment le cylindre* $y^2+z^2-A=0$, *dont la trace est le cercle section de la surface* Δ *par le plan* yOz.

2° Rayons situés dans un plan donné.

25. On a vu, n° **19**, que les rayons $(\alpha', \beta', \gamma')$, situés dans un plan donné (u', v', w'), sont déterminés par les deux équations

$$(39)\quad \begin{cases} a_1^2 u'\beta'\gamma' + b_1^2 v'\gamma'\alpha' + c_1^2 w'\alpha'\beta' = 0, \\ \alpha'^2(Bw'^2 + Cv'^2 - 1) + \beta'^2(Cu'^2 + Aw'^2 - 1) \\ \quad + \gamma'^2(Av'^2 + Bu'^2 - 1) - 2Av'w'\beta'\gamma' \\ \qquad - 2Bw'u'\gamma'\alpha' - 2Cu'v'\alpha'\beta' = 0. \end{cases}$$

Pour discuter les solutions fournies par les équations (39), nous assimilerons ces deux équations, homogènes en α', β', γ', à celles de deux coniques; α', β', γ' seront les coordonnées variables.

L'équation générale des coniques passant par les points communs aux coniques (39) est

$$(40)\quad \begin{cases} \alpha'^2(Bw'^2 + Cv'^2 - 1) + \beta'^2(Cu'^2 + Aw'^2 - 1) \\ \quad + \gamma'^2(Av'^2 + Bu'^2 - 1) - 2(Av'w' + \lambda a_1^2 u')\beta'\gamma' \\ \qquad - 2(Bw'u' + \lambda b_1^2 v')\gamma'\alpha' - 2(Cu'v' + \lambda c_1^2 w')\alpha'\beta' = 0, \end{cases}$$

et l'équation en λ correspondante sera, après avoir supprimé les accents de u', v', w',

$$\begin{vmatrix} Bw^2 + Cv^2 - 1 & -(Cuv + \lambda c_1^2 w) & -(Bwu + \lambda b_1^2 v) \\ -(Bvu + \lambda c_1^2 w) & Cu^2 + Aw^2 - 1 & -(Avw + \lambda a_1^2 u) \\ -(Bwu + \lambda b_1^2 v) & -(Avw + \lambda a_1^2 u) & Av^2 + Bu^2 - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$(41)\qquad 2a_1^2 b_1^2 c_1^2 uvw\lambda^3 + \Theta_1\lambda^2 + \Delta_1 = 0.$$

Nous avons posé

$$(42)\quad \begin{cases} \Theta_1 = Aa_1^4 v^2w^2 + Bb_1^4 w^2u^2 + Cc_1^4 u^2v^2 + a_1^4u^2 + b_1^4v^2 + c_1^4w^2, \\ \Delta_1 = (u^2 + v^2 + w^2)(BCu^2 + CAv^2 + ABw^2) \\ \qquad - [(B + C)u^2 + (C + A)v^2 + (A + B)w^2] + 1, \end{cases}$$

et nous poserons encore

$$(43) \qquad \Sigma_1 = \Theta_1^3 + 27 a_1^4 b_1^4 c_1^4 u^2 v^2 w^2 \Delta_1.$$

On a vu, n° [[22]], que $\Delta_1 = 0$ est l'équation tangentielle de la surface Δ; c'est l'enveloppe des plans pour lesquels les coniques (Γ) du COMPLEXE se réduisent à deux points, et la surface Δ est le lieu de ces points.

26. Avant d'aborder ces discussions, nous ferons plusieurs remarques.

Remarque I. — Lorsque $\lambda = 0$ est une racine de l'équation (41), l'équation (40), qui représente le système des sécantes communes aux deux coniques (39), se réduit à la seconde des équations (39), laquelle n'est autre que la conique (Γ) du *complexe* n° [[15]], si l'on y remplace α', β', γ' par les différences $u - u', v - v', w - w'$. Or cet ensemble de termes représente :

Une conique proprement dite, si le plan (u', v', w') ne touche pas la surface Δ_1 (ou Δ);

Un système de deux points distincts, si le plan (u', v', w') touche la surface Δ_1;

Deux points coïncidents, si le plan (u', v', w') est un plan tangent double de Δ_1.

Il résulte de là que, pour $\lambda = 0$, l'équation (40) ne représentera jamais deux droites coïncidentes, à moins que (u', v', w') ne soit un plan tangent double de Δ_1.

Remarque II. — La surface Σ_1, dont l'équation est

$$(43) \qquad \Sigma_1 = \Theta_1^3 + 27 a_1^4 b_1^4 c_1^4 u^2 v^2 w^2 \Delta_1 = 0,$$

et qui n'est autre que la seconde surface focale Σ, comme nous le verrons plus loin, possède les propriétés suivantes :

THÉORÈME XVIII. — *La surface Σ_1, qui n'est autre que la seconde surface focale Σ, est de douzième classe.*

Le plan de l'infini est un plan sextuple pour lequel la courbe de contact est

$$(44) \qquad a_1(a_1 u^2)^{\frac{1}{3}} + b_1(b_1 v^2)^{\frac{1}{3}} + c_1(c_1 w^2)^{\frac{1}{3}} = 0.$$

Les équations tangentielles du cône, touchant la surface Σ_1 (ou Σ) en son point sextuple à l'origine O, sont

$$(45) \qquad r = 0, \quad A a_1^2 v^2 w^2 + B b_1^2 w^2 u^2 + C c_1^2 u^2 v^2 = 0.$$

La surface Σ_1 (ou Σ) touche la surface Δ_1 (ou Δ) suivant la courbe de contact avec Δ_1 de la développable circonscrite aux deux surfaces $\Theta_1 = 0$, $\Delta_1 = 0$.

Les trois cylindres

$$(46) \quad \begin{cases} u = 0, \\ \Theta_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} v = 0, \\ \Theta_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} w = 0, \\ \Theta_1 = 0 \end{cases} \quad \textit{et le cône} \quad \begin{cases} r = 0, \\ \Theta_1 = 0 \end{cases}$$

sont des cylindres circonscrits doubles pour la surface Σ_1; la courbe de contact avec la surface Σ_1 de chaque plan tangent se réduit à deux points confondus à l'infini sur la direction des génératrices du cylindre; pour le cône, la courbe de contact avec la surface Σ_1 de chaque plan tangent se réduit à deux points confondus avec l'origine; c'est le cône (45) *tangent au point sextuple.*

Le point polaire d'un plan quelconque (u, v, w), *par rapport à la surface Σ_1, est toujours dans le plan qui passe par les points polaires du même plan* (u, v, w) *par rapport aux surfaces Θ_1, Δ_1, et au tétraèdre* $(u = 0,\ v = 0,\ w = 0,\ r = 0)$.

Les coordonnées d'un plan tangent quelconque à la surface Σ_1 sont données en fonction des paramètres ρ_1 et ρ_2 par les formules (théorème III)

$$(47) \quad \begin{cases} u = -x_0 \dfrac{a^2 + \rho_2}{\rho_1^2 - a^4}, \\[2ex] v = -y_0 \dfrac{b^2 + \rho_2}{\rho_1^2 - b^4}, \\[2ex] w = -z_0 \dfrac{c^2 + \rho_2}{\rho_1^2 - c^4}, \end{cases} \quad \textit{où} \quad \begin{cases} b_1^2 c_1^2 x_0^2 = (\rho_1^2 - a^4)(a^2 - \rho_2), \\ c_1^2 a_1^2 y_0^2 = (\rho_1^2 - b^4)(b^2 - \rho_2), \\ a_1^2 b_1^2 z_0^2 = (\rho_1^2 - c^4)(c^2 - \rho_2). \end{cases}$$

Les coordonnées du point de contact seront fournies par les formules (18), *n*° 7.

27. Examinons maintenant les différents cas qui peuvent se présenter d'après la nature des racines de l'équation (41).

Premier cas : $\Delta_1 . \Sigma_1 < 0$.

L'équation (41) en λ ayant ses trois racines réelles, les deux coniques (39) se coupent en quatre points réels ou en quatre points imaginaires.

Deuxième cas : $\Delta_1 . \Sigma_1 > 0$.

L'équation (41) ayant une seule racine réelle, les deux coniques (39) se coupent en deux points réels et deux points imaginaires.

Par conséquent :

Théorème XIX. — *Si* $\Delta_1 . \Sigma_1 < 0$, *les quatre rayons situés dans le plan* (u, v, w) *seront ou tous quatre réels ou tous quatre imaginaires; si* $\Delta_1 . \Sigma_1 > 0$, *parmi les quatre rayons, situés dans le plan* (u, v, w), *deux seront réels et les deux autres imaginaires.*

Troisième cas : $\Delta_1 . \Sigma_1 = 0$.

L'équation (41) admet alors une racine double, et les deux coniques (39) seront ou simplement tangentes, ou doublement tangentes, suivant que le système (40) des sécantes communes se compose de deux droites distinctes ou de deux droites coïncidentes.

Le cas actuel comprend deux hypothèses :

1° $\Delta_1 = 0$. — L'équation (41) a deux racines nulles, les coniques (39) sont donc tangentes; d'ailleurs elles le sont en un seul point, car, d'après la remarque I, n° **26**, le système (40) des sécantes communes se compose de deux droites distinctes. Ainsi :

Théorème XX. — *Dans chaque plan tangent à la surface* Δ_1, *qui n'est autre que la surface* Δ, *il y a deux rayons confondus avec celui qui la touche au point de contact du plan tangent; les deux autres rayons sont distincts entre eux et distincts du premier; ils touchent la nappe de* Δ, *que ne touche pas le plan considéré; ils sont donc réels ou imaginaires, suivant que ce plan touche la nappe inférieure ou la nappe supérieure de* Δ.

Pour les plans tangents à la surface Δ, *la conique* (Γ) *du* complexe

se réduit à deux points situés aux points où le double rayon rencontre Δ.

2° $\Sigma_1 = 0$. — L'équation en λ (41) admet encore deux racines égales, et l'équation (40) représente, en général, deux droites distinctes; donc deux des rayons situés dans le plan considéré viennent coïncider; la conique du *complexe,* située dans ce plan, est une conique proprement dite, et elle est osculatrice en un point de la surface Δ. En effet, les quatre rayons situés dans ce plan touchent la conique Γ aux points où cette dernière touche la section de la surface Δ par le plan considéré; or, si deux de ces tangentes viennent à coïncider, quatre des points d'intersection de la conique Γ avec la surface Δ viennent se confondre avec le point où cette double droite touche Δ. Le plan en question est donc osculateur en ce point à la courbe touchée sur Δ par le double rayon, et il doit toucher la surface Σ, puisqu'il est le plan focal du rayon (théorème III). La surface Σ_1 n'est donc autre que la surface Σ.

Pour qu'il y ait deux couples de rayons confondus, il faut écrire que l'équation (40) représente deux droites confondues; on obtient ainsi un système équivalant à deux relations distinctes qui définissent une surface développable.

De là :

Théorème XXI. — *La surface* Σ_1, *qui n'est autre que la surface* Σ, *est l'enveloppe des plans dans lesquels deux rayons du système viennent coïncider; la conique* (Γ) *du complexe, située dans un de ces plans, est osculatrice en un point de la surface* Δ, *le contact est du troisième ordre; les coniques du complexe, situées dans ces plans, sont des coniques proprement dites. Il y a en outre une développable circonscrite à la surface* Σ, *dont les plans renferment des coniques du complexe bi-osculatrices à la surface* Δ.

Quatrième cas : $\Delta_1 = 0$, $\Theta_1 = 0$.

L'équation (41) admet alors trois racines nulles; les coniques (39) ont trois de leurs points d'intersection confondus, et trois seulement; donc :

Théorème XXII. — *La développable* ($\Delta_1 = 0$, $\Theta_1 = 0$) *est l'enve-*

loppe des plans pour lesquels trois des rayons qui y sont contenus viennent coïncider, et trois seulement. Les coniques du complexe, situées dans ces plans, se réduisent à deux points distincts.

28. Il nous reste à étudier les *plans singuliers* du système des rayons, c'est-à-dire la distribution des rayons correspondant aux plans remarquables des surfaces focales.

Les calculs n'offrant aucune difficulté, nous abrégerons en ne faisant qu'énoncer les résultats qu'on obtient.

Théorème XXIII. — *Lorsque le plan (u, v, w) touche un des cylindres doubles*

$$\left\{\begin{array}{l} u = 0, \\ \Theta_1 = 0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} v = 0, \\ \Theta_1 = 0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} w = 0, \\ \Theta_1 = 0, \end{array}\right.$$

de la surface Σ, parmi les quatre rayons situés dans ce plan, trois se confondent avec une parallèle aux génératrices du cylindre; cette droite rencontre le cercle section de la surface Δ par le plan de symétrie perpendiculaire au cylindre; le quatrième rayon, également parallèle aux génératrices du cylindre, passe par le point où le plan (u, v, w) rencontre encore le cercle ci-dessus désigné. La conique (Γ) du complexe passe par le premier de ces points.

Le premier foyer coïncide avec le point où le triple rayon rencontre le cercle; le second foyer est à l'infini sur la génératrice de contact du plan (u, v, w) avec le cylindre double; les points limites sont à l'infini.

2° Pour chacun des plans tangents doubles de la surface Δ, lesquels sont aussi des plans doubles de la surface Σ, il y a une infinité de rayons de système situés dans ce plan; ces rayons sont tous issus du point où le plan considéré touche le cercle section de la surface Δ, par le plan de symétrie perpendiculaire au plan tangent double.

3° Pour le plan sextuple de Σ, il y a une infinité de rayons du système situés dans ce plan; ces rayons enveloppent le cercle imaginaire de l'infini $(u^2 + v^2 + w^2 = 0)$; la surface Δ est touchée suivant ce cercle par le cône asymptote d'une sphère concentrique.

4° Pour les plans touchant le cône double $(r = 0, \Theta_1 = 0)$ de la surface Σ (lequel cône est le cône tangent à Σ en son point sextuple), les

quatre rayons du système, situés dans un de ces plans, passent par l'origine; trois d'entre eux se confondent avec une des intersections de ce plan avec le cône

$$(48) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0;$$

l'autre rayon est la seconde intersection.

5° *Si l'on considère un plan quelconque passant par l'origine, parmi les rayons situés dans ce plan, deux sont issus de l'origine et appartiennent au cône* (48); *les deux autres sont parallèles.*

6° *Pour les plans passant par l'origine et définis par les équations*

$$(49) \qquad \frac{u^2}{a_1^2} = \frac{v^2}{b_1^2} = \frac{w^2}{c_1^2},$$

lesquels plans touchent à la fois les cônes des directions asymptotiques des surfaces Δ *et* Σ, *savoir :*

$$(50) \qquad \frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} + \frac{w^2}{C} = 0, \qquad (a_1^2 u)^{\frac{2}{3}} + (b_1^2 v)^{\frac{2}{3}} + (c_1^2 w)^{\frac{2}{3}} = 0,$$

il y a une infinité de rayons du système; et si l'on considère le plan $(+a_1, +b_1, +c_1)$ *par exemple, tous ces rayons sont parallèles à la direction* $\frac{x}{a_1} = \frac{y}{b_1} = \frac{z}{c_1}$.

7° *Pour les plans touchant à la fois les cônes des directions asymptotiques de la surface* Δ, *savoir :*

$$(51) \qquad u^2 + v^2 + w^2 = 0, \qquad \frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} + \frac{w^2}{C} = 0,$$

il y a une infinité de rayons situés dans le plan considéré et parallèles à l'une des directions

$$\frac{Ax^2}{a_1^2} = \frac{By^2}{b_1^2} = \frac{Cz^2}{c_1^2}.$$

On retrouve ainsi plusieurs des propriétés énoncées dans le théorème XVII.

29. Nous terminerons cette discussion par une remarque intéressante relative aux surfaces Δ, Δ_1, Θ, Θ_1, Σ, Σ_1, qui jouent un rôle important dans toute cette étude.

Théorème XXIV. — *Si l'on considère les surfaces*

$$(52)\quad \begin{cases} \Delta = (x^2+y^2+z^2)(Ax^2+By^2+Cz^2) \\ \qquad - [A(B+C)x^2+B(C+A)y^2+C(A+B)z^2] + ABC, \\ \Delta_1 = (u^2+v^2+w^2)(BCu^2+CAv^2+ABw^2) \\ \qquad - [(B+C)u^2+(C+A)v^2+(A+B)w^2] + 1, \end{cases}$$

$$(53)\quad \begin{cases} \Theta = a_1^4y^2z^2+b_1^4z^2x^2+c_1^4x^2y^2-(Aa_1^4x^2+Bb_1^4y^2+Cc_1^4z^2), \\ \Theta_1 = Aa_1^4v^2w^2+Bb_1^4w^2u^2+Cc_1^4u^2v^2-(a_1^4u^2+b_1^4v^2+c_1^4w^2), \end{cases}$$

$$(54)\quad \begin{cases} \Sigma = \Theta^2 - 27a_1^4b_1^4c_1^4x^2y^2z^2\Delta, \\ \Sigma_1 = \Theta_1^2 - 27a_1^4b_1^4c_1^4u^2v^2w^2\Delta_1, \end{cases}$$

on remarque que si l'on pose

$$(55)\quad \begin{cases} u = \rho x\sqrt{A}, \\ v = \rho y\sqrt{B}, \quad \text{où} \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{ABC}}, \\ w = \rho z\sqrt{C}, \end{cases}$$

on a identiquement, eu égard aux relations (55),

$$(56)\quad \Delta_1 = \rho^2.\Delta, \quad \Theta_1 = \rho^2.\Theta, \quad \Sigma_1 = \rho^4.\Sigma.$$

D'ailleurs les équations (55) *définissent le plan polaire* (u, v, w) *du point* (x, y, z) *par rapport à l'*ELLIPSOÏDE DIRECTEUR

$$(57)\quad x^2\sqrt{A}+y^2\sqrt{B}+z^2\sqrt{C} = \sqrt{ABC}.$$

Les surfaces Δ et Δ_1, Θ et Θ_1, Σ et Σ_1 sont donc polaires réciproques l'une de l'autre par rapport à l'ellipsoïde (57).

Comme les surfaces Δ et Δ_1 sont identiques, il en résulte qu'une des

nappes de la surface Δ est la polaire réciproque de l'autre par rapport à cet ellipsoïde (c'est une propriété connue).

La même propriété a lieu pour la surface Σ.

50. On appelle *rayon double*, dans un système d'ordre m, un rayon tel, que d'un quelconque de ses points on ne peut que $(m-2)$ rayons distincts du rayon considéré.

On constate très-aisément que :

Le système de rayons étudié ne possède pas de RAYONS DOUBLES.

51. Une droite passant par un point (x', y', z') et de direction (α, β, γ) sera représentée par les équations

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} \gamma y - \beta z &= \lambda,\\ \alpha z - \gamma x &= \mu,\\ \beta x - \alpha y &= \nu,\end{aligned}\right. \qquad \text{où} \qquad (59)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda &= \gamma y' - \beta z',\\ \mu &= \alpha z' - \gamma x',\\ \nu &= \beta x' - \alpha y',\end{aligned}\right.$$

x, y, z étant les coordonnées variables.

La droite peut être définie par les *six quantités* $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$, entre lesquelles on a la relation unique

$$(60)\qquad \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0;$$

ce sont, d'après Plücker, les *coordonnées* de la droite.

On voit alors, par les équations (7), n° **18**, que :

Les six coordonnées $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ *d'un rayon quelconque du système étudié seront liées par les* TROIS *relations*

$$(61)\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0,\\ &\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2,\\ &a^2\alpha\lambda + b^2\beta\mu + c^2\gamma\nu = 0.\end{aligned}\right.$$

Ceci permet d'étudier, à un autre point de vue, ce système de rayons.

Nous nous contenterons d'énoncer les propositions suivantes, très-faciles à démontrer :

Théorème XXV. — *Le nombre des rayons du système rencontrant deux droites fixes est égal à huit.*

La surface engendrée par les rayons du système, s'appuyant sur une droite fixe donnée D_1, *est une surface réglée du huitième ordre; la droite fixe* D_1 *est une droite quadruple pour la surface; tout plan passant par* D_1 *coupe la surface suivant quatre autres droites.*

Mémoire sur l'enseignement des arts graphiques;

Par M. DE LA GOURNERIE [*].

1. Dans l'organisation des études à l'École des Travaux publics et ensuite à l'École Polytechnique, Monge a établi l'enseignement des arts graphiques sur des bases nouvelles. Il a présenté le trait de la coupe des pierres d'une manière abstraite, et l'a érigé sous le nom de *Géométrie descriptive* en trait universel. Ensuite la Stéréotomie, considérée comme une simple application de la Géométrie descriptive, a été professée avant toutes les autres parties de l'Architecture.

Ces modifications aux méthodes suivies ont été successivement adoptées par la plupart des établissements d'instruction.

Je me propose de rechercher si les adhésions aux idées de Monge ont été unanimes, et si les résultats obtenus sont aussi favorables qu'on l'avait espéré.

STÉRÉOTOMIE.

Coupe des pierres.

2. Autrefois, l'enseignement de la coupe des pierres était lié à l'organisation des maîtrises et du compagnonnage. On possédait d'ailleurs de bons ouvrages écrits par des architectes [**] et destinés aux per-

---

[*] Ce Mémoire doit paraître dans le prochain fascicule des *Annales du Conservatoire des Arts et Métiers.* Désirant soumettre les considérations qu'il contient à l'appréciation des géomètres, j'ai demandé à M. Liouville son insertion dans le *Journal de Mathématiques.* (20 janvier 1874).

[**] Milliet-Dechalles n'était pas architecte, mais son Livre n'est qu'un abrégé de celui du P. Derand; quant à Desargues, il a simplement proposé un nouveau mode de solution pour les problèmes graphiques que présente la coupe des pierres.

sonnes familiarisées avec la Construction. Ils étaient principalement consacrés à l'exposition des tracés; mais cependant les questions relatives à l'exécution et à la stabilité n'étaient pas entièrement négligées.

Dans l'enseignement établi par Monge, les leçons sur la Stéréotomie sont données à des élèves complétement étrangers à l'Architecture, et, par suite, l'art est réduit à sa partie géométrique [*].

Monge s'était laissé tellement dominer par cette manière incomplète de considérer la question, qu'il a entrepris de résoudre, par les seules ressources de la Géométrie, le problème de la décomposition d'une voûte en voussoirs. Il a présenté, comme solution générale, la division de l'intrados suivant ses lignes de courbure, et l'emploi de surfaces développables lieux de normales à la douelle, pour former les lits et les joints.

Le célèbre Géomètre faisait ainsi complétement abstraction des données essentielles du problème; il ne s'inquiétait ni de la situation de la voûte par rapport à la direction de la pesanteur, ni de la position des points d'appui, ni de l'existence possible de surcharges diversement réparties, ni de la forme des courbes de tête et des arêtes qui limitent l'intrados: la nature géométrique de cette surface était seule prise en considération.

Les disciples de Monge admirent sans difficulté le résultat auquel leur maître était parvenu.

3. La Stéréotomie était enseignée avec beaucoup de soin à l'ancienne École des Ponts et Chaussées. Fourcy dit que les épures de coupe des pierres y étaient *très-compliquées* (*Histoire de l'École Polytechnique*, p. 8), ce qui signifie sans doute que l'on abordait des questions difficiles, car les traits n'ont pas été simplifiés.

---

[*] Dans les programmes de l'ancienne École Polytechnique, la Stéréotomie fait partie de la Géométrie descriptive pure. (*Voir* le Rapport du Conseil de perfectionnement du 3 nivôse an IX.)

Les applications de la Géométrie descriptive étaient la Fortification, l'Architecture, etc. Sganzin, qui enseignait la Construction, était considéré comme faisant un *Cours de Géométrie descriptive appliquée à l'art de l'Ingénieur des Ponts et Chaussées* : c'est le titre de son Traité (1re édition). Dans cette manière de voir, le dessin n'est pas un auxiliaire, mais la base, le fondement même de tous les arts mécaniques et industriels.

En 1793, l'École avait perdu presque tous ses élèves. Lamblardie la réorganisa dans les années suivantes, en ayant égard au rôle nouveau qu'elle avait à remplir par suite de la création de l'École Polytechnique. La coupe des pierres ne fut pas comprise dans les programmes. Prony, nommé directeur au commencement de l'an VII, après les morts successives de Lamblardie et de Chézy, s'empressa de demander le rétablissement du cours de Stéréotomie. La proposition qu'il fit à ce sujet au Ministre de l'Intérieur est contenue dans un Rapport qui a été publié sous le titre de *Plan d'instruction des élèves de l'École des Ponts et Chaussées*. Je crois utile de reproduire le commencement de l'article consacré à la Stéréotomie :

« Les élèves ayant été exercés à la Géométrie descriptive, on se bornera à rappeler, d'une manière très-succincte, les principes de cette science, dans ses rapports immédiats avec l'art de la coupe des pierres et de la charpente.

» Après cette exposition rapide, on s'occupera de la partie de l'art de la coupe des pierres qui enseigne les moyens de donner à chacune des pierres qui doivent composer un édifice les formes convenables et nécessaires pour produire un effet déterminé, en satisfaisant aux conditions assez nombreuses qui dérivent des lois de la Statique, de la solidité et de l'économie; on fera observer quelles sont, parmi ces formes, celles qu'il faut choisir selon les circonstances.

» Pour donner à ces principes généraux le développement nécessaire, on passera en revue les différents *traits* connus et classés jusqu'à présent sous les dénominations de portes, de descentes, de trompes, d'escaliers, etc., que l'on tâchera de désigner et de classer d'une manière plus naturelle et plus conforme à la marche de la Géométrie descriptive. On fera remarquer, en même temps, les erreurs qui se rencontrent dans quelques Traités de la coupe des pierres, et l'on examinera quels sont les cas particuliers où des raisons d'économie et de plus grande facilité dans l'exécution peuvent contraindre de s'écarter un peu des méthodes rigoureuses. »

4. Ce programme est bien différent de celui qui était suivi à l'École Polytechnique. Monge enseigne que la division d'une voûte en voussoirs est une question de pure Géométrie. D'après Prony, on doit avoir

égard *aux conditions assez nombreuses qui dérivent des lois de la Statique, de la stabilité et de l'économie*. L'école de Monge est très-sévère sur l'exactitude géométrique [*]. Prony recommande d'examiner *quels sont les cas particuliers où des raisons d'économie et de plus grande facilité dans l'exécution peuvent contraindre de s'écarter un peu des méthodes rigoureuses*.

Mais ce qui est bien plus important que les termes mêmes du programme, ce qui modifiait d'une manière essentielle la nature des leçons, c'est que les élèves avaient déjà suivi à l'École Polytechnique des cours d'Architecture, de Travaux civils et de Fortification, et que l'enseignement de la Stéréotomie marchait parallèlement avec celui de la Construction et de la Mécanique appliquée.

D'après les dispositions du *plan d'instruction*, les leçons du cours de Stéréotomie, dans les deux premiers mois, étaient consacrées à la Géométrie descriptive et à la Perspective. Pendant ce temps, le professeur de Mécanique traitait l'importante question de la stabilité des voûtes, et les élèves faisaient des projets de maisons sous la direction du professeur de Construction. L'enseignement de la coupe des pierres n'était commencé que le troisième mois.

Dès que le cours était terminé, les élèves, ayant toute la théorie présente à l'esprit, allaient visiter les grands travaux et pouvaient se familiariser promptement avec les détails de la pratique.

Prony raisonne comme si les élèves avaient été étrangers à la Stéréotomie. Dans cette supposition, les dispositions qu'il prescrit et le programme qu'il trace paraissent excellents; mais on pouvait difficilement captiver l'attention des jeunes ingénieurs, en leur expliquant des traits qu'ils connaissaient déjà. Le professeur de l'École des Ponts et Chaussées devait presque nécessairement se borner à présenter les considérations omises à l'École Polytechnique.

---

[*] *Voir* les observations de Monge sur la précision de la taille, dans son article sur les lignes de courbure, les changements faits aux épures de La Rue, admises dans la collection de l'École Polytechnique, et divers passages d'Eisenman.

Je reconnais, du reste, que plusieurs des anciens traits devaient être corrigés ou complétés.

Quelques-unes des modifications faites aux dessins de La Rue paraissent bonnes; celle que l'on remarque sur l'épure de l'*arrière-voussure de Marseille* était nécessaire.

Ces rectifications tardives n'ont qu'une utilité très-bornée. Prony espérait probablement amener l'École Polytechnique à modifier, et peut-être même à abandonner l'enseignement de la coupe des pierres. Monge était en Égypte, et l'occasion pouvait paraître favorable.

5. Le 5 prairial an VII, dans une assemblée des élèves, Prony annonça la mise à exécution du *Plan d'instruction*, et insista en ces termes sur le cours de Stéréotomie :

« La coupe des pierres et des bois occupait une partie considérable des exercices de l'ancienne École des Ponts et Chaussées, et le Ministre, pour faire revivre complétement cette branche importante d'instruction, vous a nommé un troisième professeur, qui en est spécialement chargé. » (*Opuscules* [*], t. IV, p. 180.)

Eisenman, ingénieur et chef du bureau des dessinateurs à l'École Polytechnique, venait d'être placé à l'École des Ponts et Chaussées; il s'était fait connaître par des articles sur l'enseignement de la Stéréotomie [**], et se trouvait tout préparé pour la professer suivant les idées de Monge. Prony lui confia le cours de Mécanique, pour lequel ses travaux paraissaient moins le désigner, et appela à la chaire de Stéréotomie Bruyère, cet ingénieur d'un jugement si sûr qui a mérité d'être appelé par Arago « austère et très-habile. »

Nous savons par Navier que Bruyère avait appris la Géométrie descriptive dans les ouvrages de Derand, de La Rue et de Frézier, et que de plus il avait suivi le cours de Monge à l'École Polytechnique.

---

[*] La bibliothèque de l'École des Ponts et Chaussées possède quatre volumes intitulés *Opuscules de Prony*, et composés de pièces publiées par le célèbre ingénieur. Chaque volume porte une table manuscrite à laquelle correspond une pagination spéciale.

Cette collection a été faite par Prony lui-même.

[**] *Journal de l'École Polytechnique*, IIe, IIIe et IVe cahier.

Les articles d'Eisenman présentent un grand intérêt, parce qu'ils donnent des éclaircissements sur l'enseignement de Monge. On y trouve quelques indications relatives au *principe de la moindre inégalité des parties contiguës* qui paraît avoir été pour le célèbre géomètre une loi fondamentale de la coupe des pierres. Il y a tout lieu de croire que ce principe était entièrement géométrique, comme la loi des lignes de courbure.

Lorsqu'on examine les planches du grand ouvrage de Bruyère [*], on reconnaît qu'il n'avait subi que très-peu l'influence de Monge, et le choix de Prony paraît significatif.

Le 20 thermidor de l'an VIII, dans une séance solennelle pour la distribution des prix à l'École des Ponts et Chaussées, Prony parla en ces termes des études de Stéréotomie : « Le Ministre, le magistrat spécialement chargé des travaux publics, et les ingénieurs qui ont jugé vos pièces de concours.... n'ont pas remarqué sans plaisir que la coupe des pierres et des bois avait été remise en vigueur dans cette École, et ils s'attendent que bientôt elle y aura repris son ancienne activité. » (*Opuscules*, t. IV, p. 196.)

Cette espérance ne s'est pas réalisée.

6. Lorsque la révolution du 18 brumaire arriva, les Conseils législatifs étaient saisis d'un projet de loi destiné à compléter l'organisation de l'École Polytechnique.

La loi fut promulguée le 25 frimaire, après avoir été votée suivant les formes admises pendant la période de transition où l'on se trouvait. Le nouveau gouvernement y avait introduit diverses dispositions, principalement dans le but de réduire les résistances de différents genres que rencontrait l'École [**]. Un Conseil supérieur, dont on

[*] *Études relatives à l'Art des constructions*, 1823-1828.

Bruyère connaissait toutes les ressources du dessin. Son ouvrage forme un contraste frappant avec les publications faites à la même époque par les ingénieurs de l'école de Monge, qui n'emploient que des figures géométrales.

D'après Navier, les *Études* de Bruyère devraient être dans les mains de tous les ingénieurs (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1833, 2e semestre).

[**] L'École Polytechnique était alors en grand crédit. Le Ministère de l'Intérieur, dont elle dépendait ainsi que l'École des Ponts et Chaussées, venait d'être confié à Laplace, l'un de ses examinateurs permanents. Monge était d'ailleurs l'ami personnel du chef du nouveau gouvernement; il l'avait accompagné dans son expédition en Égypte et dans son retour en France.

Prony au contraire était en défaveur. (Voir Arago et les diverses biographies.)

L'influence de Monge fut toute-puissante dans les faits que je rapporte; on ne peut avoir à ce sujet aucun doute, car Napoléon Ier, parlant des mesures prises après le 18 brumaire, dit : « L'École Polytechnique n'était qu'ébauchée; Monge fut chargé d'en rédiger l'organisation définitive. » (*Mémoires de Napoléon*, 2e édition, t. VI, p. 109.)

trouve la première idée dans le projet de loi, fut créé sous le nom de *Conseil de perfectionnement*, et reçut des attributions considérables, notamment celle de préparer des programmes pour les Écoles d'Application, « de manière que l'enseignement y fût en harmonie et entièrement coordonné avec celui de l'École Polytechnique. » Les services publics intéressés étaient représentés dans le Conseil par des délégués chargés de présenter des propositions pour les programmes des écoles spéciales.

7. Le Conseil de perfectionnement s'attacha à faire ressortir l'importance du travail de coordination qui lui était confié : « De quoi eût-il servi sans cela, dit-il, d'accumuler tant de moyens d'instruction pour préparer des sujets, de les soumettre à tant d'épreuves, si, au sortir de ce noviciat, ils étaient obligés de remanier avec dégoût et sans fruit les mêmes matières [*]? »

Bien que Prony fût membre du Conseil, son plan d'instruction reçut des modifications qui le dénaturaient complétement : on conserva toutes les parties de l'enseignement, mais leur répartition entre les trois professeurs de l'École des Ponts et Chaussées fut faite d'une manière très-différente. La Stéréotomie, au lieu d'être l'objet d'un cours spécial, se trouva réunie à la Construction pour les routes, les ponts et la navigation intérieure; ensuite toutes les considérations sur l'enseignement de la coupe des pierres et de la coupe des bois furent supprimées.

Le Conseil avait d'ailleurs compris la Stéréotomie dans le programme du cours de *Géométrie descriptive pure* de l'École Polytechnique, affirmant ainsi sa volonté d'en maintenir l'enseignement à cette école.

Prony vaincu fit paraître en brochure ses discours de l'an VII et de l'an VIII, qui cependant avaient déjà été imprimés dans les comptes rendus des séances. Il eut soin de préciser l'époque de cette publication en en faisant connaître non-seulement l'année, mais encore le mois,

---

[*] Rapport du Conseil de perfectionnement du 3 nivôse an IX.
Le retard des opérations du Conseil tient probablement à ce que la loi fixait sa réunion en brumaire, et, comme elle avait été rendue en frimaire, il fallait attendre une année.

qui est celui où le Conseil de perfectionnement trancha la question; on lit sur la page du titre : « Nivôse an IX » [*]. Enfin Prony modifia le second des passages que j'ai reproduits, de manière à mieux indiquer l'intention qu'il avait eue d'établir sans retard un enseignement sérieux de la Stéréotomie à l'École des Ponts et Chaussées [**].

Il me paraît impossible de ne pas voir une protestation dans cette réimpression.

Les propositions du Conseil de perfectionnement de l'École Polytechnique, pour la distribution des matières de l'enseignement dans les différents cours de l'École des Ponts et Chaussées, furent approuvées, et même insérées dans le décret d'organisation du corps des Ponts et Chaussées (7 fructidor an XII).

8. Tout ce que je viens de dire résulte de pièces imprimées et publiées. J'aurais probablement obtenu, sans peine, de consulter les procès-verbaux des délibérations des Conseils des Écoles Polytechnique et des Ponts et Chaussées et toutes les archives des études, mais cela ne m'a pas paru nécessaire, et même j'ai cru qu'il y aurait quelque inconvénient à procéder ainsi.

Les documents qui sont à la disposition de tout le monde suffisent pour faire connaître l'opinion de Prony qui, géomètre et ingénieur, professeur à l'École Polytechnique depuis sa fondation et directeur de l'École des Ponts et Chaussées, pouvait, mieux que personne peut-être, apprécier la question sous tous ses aspects.

Prony s'était familiarisé avec l'art de la maçonnerie par la construction de divers ouvrages et notamment du pont de la Concorde, dont il avait dirigé l'exécution sous les ordres de Perronet, après en avoir fait les projets de détail. A cette époque tous ses travaux scientifiques concernaient l'art des constructions et principalement la Statique des voûtes [***]. Enfin une circonstance particulière permet d'établir qu'il s'était beaucoup occupé du trait.

Prony a publié en 1788 le programme d'un travail étendu qu'il se pro-

---

[*] *Opuscules*, t. IV, p. 211.

[**] Au lieu de : « que bientôt », on lit « qu'en l'an IX ».

[***] *Notice sur les Travaux et les services de Prony* (*Opuscules*, 3e vol., p. 115).

posait d'écrire sur la science de l'ingénieur des Ponts et Chaussées. Dans cette pièce il insiste sur l'importance de la coupe des pierres et annonce l'intention de la traiter avec soin. Il apprécie ensuite les Traités de La Rue et de Frézier, comme ouvrages didactiques, en des termes que je trouve sévères, mais qui témoignent d'une connaissance approfondie du sujet [*].

9. Le Comité des Fortifications a eu, dans l'origine, des discussions avec l'École Polytechnique, mais on ne voit pas qu'il ait réclamé contre le mode d'enseignement adopté pour la Stéréotomie.

Pendant sa session de l'an IX, le conseil de perfectionnement régla le programme pour les Écoles de l'Artillerie et du Génie. On lit dans cette pièce, à la colonne des exercices que l'on devait demander aux élèves :

« Résolution graphique de différents problèmes de coupe de pierres et de charpenterie, avec les considérations qui tiennent aux procédés de l'art des constructions; calcul des poussées et portées; rédaction de toutes les épures lavées et coloriées; mémoire raisonné sur les moyens d'exécution. »

Les corps militaires paraissent avoir pensé que pour la Stéréotomie on devait, dans les écoles spéciales, compléter seulement l'instruction que les élèves avaient acquise à l'École Polytechnique. On ne doit pas être surpris que le Génie ait accepté sans difficulté l'établissement d'un mode d'enseignement qui avait pris naissance à l'École de Mézières. D'ailleurs les ingénieurs militaires étaient engagés, pour d'autres sujets, dans une lutte assez vive avec l'École Polytechnique, et devaient, par suite, éviter les discussions sur toutes les questions qu'ils pouvaient regarder comme étant d'un intérêt secondaire.

10. Le système d'enseignement de Monge a d'abord été peu remarqué en dehors des services publics. Dans son important ouvrage sur l'*Art*

---

[*] L'exemplaire que l'on trouve dans les *Opuscules* (1er vol., p. 9) porte, en remplacement de la première page, un carton sur lequel le style a été modifié d'après les idées républicaines, et qui peut induire en erreur sur la date réelle.

L'Administration des Ponts et Chaussées a envoyé ce programme à tous les ingénieurs, en leur demandant de fournir à Prony les renseignements qui lui seraient utiles.

Le célèbre ingénieur, incessamment chargé de travaux urgents et difficiles, n'a pas pu accomplir son projet.

de bâtir, publié de 1802 à 1817, Rondelet suit un mode d'exposition très-différent : il parle d'abord des matériaux, puis de la maçonnerie; il fait ensuite connaître les principaux résultats donnés par l'expérience sur la stabilité des voûtes, et il n'aborde la description des appareils que lorsqu'il peut justifier les dispositions adoptées.

L'ouvrage de Rondelet a été parfaitement accueilli : plusieurs éditions en ont été faites et les Architectes le consultent souvent; mais peu à peu les disciples de Monge ont introduit dans les établissements où leur influence s'est étendue la méthode qui consiste à commencer l'enseignement de la Construction par l'exposition des tracés de la Stéréotomie.

Je suis entré dans ces détails un peu minutieux, parce qu'il est important de savoir comment une méthode qui paraît avoir de grands inconvénients, et dans laquelle les études suivent un ordre contraire à celui du développement naturel des connaissances, a pu se faire accepter dans notre pays.

11. Je me propose maintenant de rechercher quels ont été les résultats. Une circonstance particulière permet de les apprécier avec une certaine exactitude.

L'établissement des chemins de fer a nécessité la construction de ponts sous des obliquités plus grandes que celles qui étaient autrefois admises. L'art des arches biaises s'est constitué dans un pays où les doctrines et la méthode d'enseignement de Monge n'avaient pas pénétré; mais il a reçu en France quelques modifications, et de nombreux Mémoires ont été publiés à son occasion. Leur lecture fait connaître les diverses opinions sur les principes qui doivent diriger l'architecte dans la division d'une voûte en voussoirs.

Plusieurs ingénieurs pensent qu'il faut seulement se préoccuper d'avoir des pierres terminées par des angles droits. En général, cependant, les auteurs considèrent la question comme étant au moins en partie du domaine de la Mécanique. Les uns regardent que les pressions qui se développent doivent être dirigées vers les points d'appui par un appareil convenable; les autres croient que ces forces ne dépendent pas de l'appareil; enfin ces derniers ne sont nullement d'accord sur la direction dans laquelle les poussées s'établissent.

On remarque des divergences tout aussi grandes dans les procédés d'investigation : quelques ingénieurs présentent des raisonnements de simple Géométrie; d'autres consultent la théorie de l'élasticité; beaucoup recourent à la Mécanique des solides invariables; enfin quelques-uns pensent que l'expérience peut seule donner des indications certaines. La discussion n'a fait qu'augmenter la confusion; chacun raisonne d'après son principe, et les arguments se croisent sans se répondre [*].

Je désirerais beaucoup que les personnes qui s'intéressent à l'enseignement de la Stéréotomie parcourussent les principaux Mémoires publiés sur l'appareil de l'arche biaise. J'ai donné des indications qui peuvent faciliter ce travail [**]. Je crois qu'on sera surpris de la profonde divergence des opinions, et cependant en théorie l'appareil d'une arche droite ou biaise est relativement simple, parce que toutes les pierres ne sont soumises qu'à des forces de compression.

12. Je suis convaincu que l'on aurait obtenu de meilleurs résultats si la coupe des pierres avait été professée conformément aux idées de Prony, de manière que le professeur de Stéréotomie, en parlant des escaliers, des trompes, des plates-bandes, etc...., eût pu faire connaître les résultats de l'expérience sur l'établissement de ces divers ouvrages, et discuter les cas où des moyens artificiels de consolidation deviennent nécessaires.

Cet enseignement, imité des anciens auteurs et analogue au mode d'exposition adopté par Rondelet, se serait progressivement amé-

---

[*] J'ai été engagé dans cette discussion, et les critiques ne m'ont pas été épargnées. On a dit, notamment, que mes raisonnements étaient excellents pour un cours de Géométrie descriptive, mais que je négligeais diverses circonstances dont les ingénieurs doivent tenir compte. Je crois que ce reproche n'avait aucun fondement, et qu'on ne me l'adressait que parce que je professe la Géométrie descriptive. Je me suis défendu de mon mieux.

J'ai reçu, pour la Stéréotomie, l'enseignement géométrique établi par Monge, et j'en ai naturellement subi l'influence dans une certaine mesure. Si ces premières leçons ont réellement fait sur moi une impression durable, je n'en dois désirer que plus vivement de voir l'enseignement de la Construction rétabli sur ses véritables bases.

[**] *Mémoire sur l'appareil de l'arche biaise, suivi d'une analyse des principaux ouvrages publiés sur cette question.* Paris, Baudry, 1872.

lioré; les diverses opinions eussent été examinées et classées, et la confusion qui existe maintenant n'aurait pas pu se produire.

Il me semble certain que, si la Stéréotomie avait été enseignée à des élèves connaissant les conditions de l'établissement des maçonneries, un professeur ayant à présenter des considérations sur l'appareil des voûtes aurait été obligé d'avoir égard à l'action de la pesanteur, et n'aurait pas pu admettre, pour la division en voussoirs, une solution indépendante de la direction de cette force. Au besoin, les auditeurs l'eussent averti, et l'article de Monge sur les lignes de courbure n'aurait pas attiré l'attention en France plus qu'il ne l'a fait à l'étranger.

Je reviens à cet article, parce que j'y trouve un témoignage d'une haute valeur sur les inconvénients de l'enseignement de la Stéréotomie à un point de vue purement géométrique. Les ouvrages contemporains pourraient peut-être me fournir d'autres témoignages, mais je ne veux pas m'engager dans une semblable discussion.

13. Philibert de l'Orme, qui a révélé les tracés de la coupe des pierres, avait conçu le plan d'un Traité rationnel de Stéréotomie. « J'emploierai, dit-il, le temps qui me sera plus à propos à revoir Euclide et accommoder sa théorie avec la pratique de notre Architecture, lui accompagnant Vitruve et le réduisant à une certaine méthode. »

Il me paraît difficile de mieux définir les conditions que l'on doit se proposer de remplir dans un Traité de coupe des pierres. La première difficulté, l'explication géométrique des traits doit être considérée comme résolue depuis la publication de l'ouvrage de Frézier. Personne n'a encore satisfait complétement à la seconde condition, et Monge s'est éloigné du but parce qu'il a abandonné Vitruve.

14. En Angleterre, la Stéréotomie est restée jointe à la Construction. Les Traités de coupe des pierres de Nicholson et de Dobson, qui sont, je crois, les plus répandus, ont pour titres, le premier : *A popular and practical Treatise on masonry and Stonecutting*; le second, *The rudiments of masonry and Stonecutting*. Je ne prétends pas que ces ouvrages soient au-dessus de toute critique, mais les conditions essentielles de l'art y sont beaucoup moins négligées que dans les traités des auteurs de l'école de Monge.

Il importe de remarquer que nous avons devancé de deux siècles les Anglais pour des publications sur la coupe des pierres. Le *Traité d'Architecture* de Philibert de l'Orme est de 1567, et le livre du général Vallancey, qui paraît être en Angleterre le plus ancien ouvrage sur le trait, n'a été publié qu'en 1766.

15. Si maintenant nous examinons l'enseignement de la coupe des pierres d'un point de vue plus modeste, et comme ayant uniquement pour but de familiariser avec la pratique de l'art de l'appareilleur, nous trouverons que la méthode de Monge présente deux inconvénients.

Le premier consiste en ce que, dans les exercices qu'on propose aux élèves, on ne peut faire porter le problème que sur des détails secondaires. Il est impossible de demander à des personnes étrangères à l'art des constructions une étude sérieuse comprenant, pour un appareil un peu difficile, la détermination générale de la forme de l'ouvrage, et sa répartition en voussoirs, de manière que les diverses pierres aient toutes une résistance suffisante, et qu'il soit facile de les tailler et de les poser. Or ce sont les travaux de ce genre qui sont les plus profitables.

Le second inconvénient résulte de ce que l'enseignement de la Stéréotomie se trouve confiné aux premières études [*]. Au moment où les élèves arrivent sur les chantiers comme architectes ou ingénieurs, leur attention n'a pas été appelée sur les tracés depuis plusieurs années. Ils sont obligés de revoir ces questions avec soin, et si quelques-uns négligeaient de le faire, ils se trouveraient dans la nécessité de confier à des subalternes diverses études de détail ; ils ne pourraient guider un contre-

---

[*] Les idées qui ont présidé à l'organisation de l'enseignement à l'École Polytechnique sont exposées dans une pièce officielle publiée sous le titre de : *Développement sur l'enseignement adopté pour l'École centrale des Travaux publics*. On y lit, à l'article de la seconde année : « Le deuxième et le troisième mois seront consacrés à l'étude de la construction des ponts. Il ne sera plus question du trait que tous les élèves auront appris dans la première année, mais de tous les travaux relatifs à la construction.... »

D'après Fourcy, la main de Monge est fortement empreinte dans ce document (*Hist. de l'École Polytechnique*, p. 41).

maître embarrassé ni, à plus forte raison, former des appareilleurs.

Je soumets ces observations aux ingénieurs qui ont construit de grands ouvrages de maçonnerie.

16. J'ai entendu quelques personnes dire que l'ingénieur et l'architecte n'ont pas besoin de connaître toutes les ressources du trait, et qu'ils doivent se réserver pour des travaux d'un ordre plus élevé.

Monge n'envisageait certainement pas les choses de cette manière quand il a organisé l'enseignement des arts graphiques. Je crois d'ailleurs que certaines questions de Stéréotomie doivent être rangées parmi les problèmes difficiles de l'art des constructions [*]. Quoi qu'il en soit, j'ai raisonné dans l'hypothèse que l'instruction des ingénieurs sur le trait devait être égale à celle des bons appareilleurs.

Ce serait, au moins en apparence, un singulier paradoxe que de donner aux ingénieurs des connaissances mathématiques élevées, comme on le fait, à des degrés divers, dans la plupart des écoles, et de ne pas les familiariser avec la Géométrie des chantiers.

Si l'on adoptait l'opinion que je viens d'indiquer et que du reste je veux pas discuter plus longuement, on pourrait diminuer considérablement le travail des élèves, et cependant leur donner des *notions* exactes sur la coupe des pierres.

Examen de l'article de Monge sur l'emploi des lignes de courbure en Stéréotomie.

17. La théorie de Monge pour l'emploi des lignes de courbure de l'intrados comme lignes d'assise a été la première et la plus remarquée des productions de la méthode dans laquelle on considère la Stéréotomie comme une science presque entièrement géométrique. On sait depuis longtemps que cette théorie n'est pas exacte; cependant l'article dans lequel le célèbre géomètre arrive à conclure que « la division d'une voûte en voussoirs doit toujours être faite suivant les lignes de cour-

[*] Je place dans ce nombre toutes les constructions qui, sous le rapport de l'appareil, ne rentrent pas dans les types connus et classés : par exemple, l'établissement d'une arche avec des conditions notablement différentes de celles que l'on rencontre dans la pratique ordinaire, pour le biais, le surbaissement et la pente des lignes de naissance.

bure de la surface de la voûte » est encore regardé par quelques personnes comme un modèle, et on le place assez souvent sous les yeux des commençants. Je crois en conséquence qu'il est utile de le discuter minutieusement. J'examinerai d'abord la partie où une question de Mécanique est transformée en un problème de Géométrie, et ensuite les passages où Monge développe des considérations de Géométrie et de construction.

18. La base de la théorie de Monge est exposée dans la phrase suivante [*] : « Une des principales conditions auxquelles la forme des joints des voussoirs doit satisfaire, c'est d'être partout perpendiculaires à la surface de la voûte que ces voussoirs composent. Car, si les deux angles qu'un même joint fait avec la surface de la voûte étaient sensiblement inégaux, celui de ces angles qui excéderait l'angle droit serait capable d'une plus grande résistance que l'autre, et, dans l'action que deux voussoirs consécutifs exercent l'un sur l'autre, l'angle plus petit que l'angle droit serait exposé à éclater, ce qui, au moins, déformerait la voûte, et pourrait même altérer sa solidité et diminuer la durée de l'édifice. »

Il est important, sans doute, que les angles des voussoirs n'éclatent pas, mais ce résultat est tout à fait insuffisant pour assurer la stabilité d'une construction. L'angle droit n'a d'ailleurs en lui-même et par sa nature aucune vertu pour produire l'équilibre; il n'est utile qu'autant qu'on le place d'une manière convenable par rapport aux pressions qui doivent se développer. Si l'on ne s'inquiète pas de la direction de ces forces, les appareils qu'on pourra imaginer en enchâssant les unes auprès des autres des pierres taillées sous des faces rectangulaires n'auront absolument aucune valeur.

De ce que dans le tassement des maçonneries d'une plate-bande les angles aigus des claveaux sont quelquefois brisés, il ne s'ensuit pas qu'on puisse assurer l'équilibre en établissant les lits perpendiculaires à la face plane qui forme la douelle. Les angles droits que les pierres auraient alors ne sauraient en effet les empêcher de tomber.

---

[*] L'article de Monge est à la fin de sa *Géométrie descriptive*. Il est trop connu pour que je regarde comme nécessaire de le reproduire en entier.

Je pourrais multiplier les exemples de ce genre. Celui d'une plate-bande n'offre aucun autre avantage que la simplicité [*].

Dans un appareil quelconque, on doit rechercher d'abord les conditions qui assurent la stabilité; ensuite, si cela est nécessaire, on fait disparaître par divers artifices les angles trop aigus que certaines pierres pourraient présenter.

Après la phrase que j'ai citée, Monge passe à la division d'une voûte en voussoirs : sa seule préoccupation est d'avoir des pierres comprises sous des faces orthogonales et d'une taille facile.

Le problème ainsi posé est du ressort de la Géométrie.

19. Pour obtenir des voussoirs ayant des angles droits, Monge divise l'intrados par des lignes de courbure, et forme les lits et les joints avec des surfaces engendrées par des normales à la douelle.

La position des courbes de tête sur l'intrados est une des données du problème, et n'a aucune relation nécessaire avec les lignes de courbure. Il en résulte que, dans la disposition prescrite par Monge, les voussoirs des têtes, qui sont très-importants, peuvent avoir des angles de toutes les grandeurs.

Monge raisonne comme si l'intrados était une surface géométrique complète. Les voussoirs qu'il définit ont en réalité des angles droits, quand les courbes de tête et les lignes de naissance sont des lignes de courbure, et que d'ailleurs l'intrados n'est pas interrompu par des lunettes; mais ce n'est là qu'un cas très-particulier.

20. D'après Monge, on ne peut avoir des surfaces convenables pour les lits et les joints que si l'on a divisé l'intrados par des lignes de courbure.

Le célèbre géomètre commence par dire : « Lorsqu'il est nécessaire que les joints des voussoirs soient des surfaces courbes, on les compose, autant qu'il est possible, de surfaces developpables »; puis, après avoir posé le principe de l'angle droit, il ajoute : « Lors donc que la surface d'un joint doit être courbe, il convient de l'engendrer

---

[*] J'ai examiné cette question avec quelque soin, dans mon *Mémoire sur l'appareil de l'arche biaise.*

par une droite qui soit partout perpendiculaire à la surface de la voûte ; et si l'on veut de plus que la surface du joint soit développable, il faut que toutes les normales à la surface de la voûte, et qui composent, pour ainsi dire, le joint, soient consécutivement deux à deux dans un même plan. »

Je crois voir là une inattention : une surface réglée peut couper une seconde surface à angle droit, sans que ses génératrices lui soient normales.

Considérons une courbe tracée sur un intrados et d'ailleurs quelconque : l'enveloppe d'un plan tangent à cette ligne, et normal à la douelle à son point de contact, est une développable qui rencontre à angle droit l'intrados, bien que ses génératrices rectilignes lui soient obliques. On trouve, par cette surface, une solution approximative du problème géométrique que Monge s'est posé.

Que l'on trace sur un intrados deux séries de lignes rectangulaires, les unes normales aux courbes des têtes et continues, les autres composées de segments limités aux premières ; que, par ces lignes, on fasse passer des surfaces développables engendrées comme il vient d'être indiqué, et l'on aura une division de la voûte satisfaisant *à peu près* aux conditions prescrites par Monge.

Cette solution peut, en général, être adoptée pour les berceaux simples, avec têtes planes ou légèrement courbes ; car alors les pressions sont sensiblement parallèles à l'intrados et aux têtes, même dans le cas où il y a du biais. Il en résulte que, si les faces des voussoirs se coupent sous des angles droits, les lits se trouvent à peu près normaux aux pressions.

21. On doit d'ailleurs remarquer qu'il n'est nullement nécessaire qu'une surface soit rigoureusement développable par son mode de génération, pour que, dans l'étendue qui correspond à un voussoir, on puisse en faire le développement, avec le degré d'exactitude que comportent les opérations de la Stéréotomie. L'Ecole de Monge est très-sévère sur ce point [*], mais les meilleurs appareilleurs admettent

[*] Voyez Eisenman (*Journal de l'École Polytechnique*, cahier II, p. 100) ; Vallée (*Spécimen de la coupe des pierres*, p. 118).

dans certains cas le développement de surfaces qui ne sont même pas exactement réglées, telles que les douelles d'un berceau tournant, quand les arcs de la méridienne compris entre deux lignes d'assise ne diffèrent pas sensiblement de segments de droites. Frézier a présenté sur ce sujet des observations judicieuses dans le quatrième livre de son Traité.

La condition d'avoir pour les joints des surfaces lieux de normales à la douelle et pouvant être développées laisserait en réalité une certaine latitude pour le tracé des lignes de division de l'intrados. Du reste, le plus souvent on ne se préoccupe en aucune manière d'avoir des joints développables.

Dans un appareil important, celui des arches biaises, on a été conduit, en cherchant à diminuer les difficultés de la taille, à prendre pour lits des surfaces gauches, tandis que la théorie indique des cylindres.

22. Je passe maintenant aux considérations relatives à la Construction. On doit se rappeler qu'elles sont présentées à des élèves qui, étant encore étrangers à l'Architecture, ne peuvent corriger ce que les énoncés ont d'insuffisant ou de défectueux.

Dans une voûte bien construite, deux des quatre faces latérales d'un voussoir ordinaire sont à peu près normales aux pressions; les deux autres leur sont parallèles. On appelle les premières *lits* et les secondes *joints* [*]. L'exactitude de la taille est plus nécessaire pour les lits que pour les joints [**]. Cette distinction est capitale en Stéréotomie. Ainsi, dans la taille par biveaux on doit éviter d'établir un lit ou une douelle d'après sa position par rapport à un joint.

On lit dans un *Rapport sur les cintres du pont d'Iéna*, fait par Prony, le 16 mars 1810 : « Les ciments n'ont pas seulement pour objet de

---

[*] Quelques architectes emploient les dénominations de *joints horizontaux*, *joints montants*; on dit aussi *joints continus* et *joints discontinus*.

[**] Dans les grands ouvrages, Perronet voulait que les pierres fussent taillées sans démaigrissement sur toute l'étendue des lits, mais, en général, il n'exigeait une aussi bonne exécution sur les joints que pour les deux tiers de leur longueur. (Art. 75 et 76 du devis du pont Louis XVI, art. 54 du devis du pont de Neuilly.)

Je cite Perronet, parce que ses ouvrages, encore très-consultés aujourd'hui, faisaient autorité du temps de Monge.

faire adhérer les pierres les unes aux autres, mais encore de former entre les cours de voussoirs des espèces de coussins qui doivent être assez épais pour que les voussoirs ne s'appuient jamais à nu les uns contre les autres; car, si un pareil contact avait lieu sous des pressions aussi énormes que celles qui s'exercent dans de semblables circonstances, la rupture des arêtes des voussoirs et celle des voussoirs eux-mêmes en résulteraient nécessairement [*]. »

Dans les joints le mortier est moins utile que dans les lits : il sert à lier les pierres et à empêcher qu'il n'y ait des vides, mais non pas à transmettre ni à répartir les pressions.

Après avoir présenté ces détails pour ceux des lecteurs qui ne seraient pas familiarisés avec la Construction, je reviens à Monge.

23. On lit dans son article :

« Chaque voussoir a plusieurs faces qui exigent la plus grande attention dans l'exécution : 1° la face qui doit faire parement, et qui, devant être une partie de la surface visible de la voûte, doit être exécutée avec la plus grande précision : cette face se nomme *douelle ;* 2° les faces par lesquelles les voussoirs consécutifs s'appliquent les uns contre les autres : on les nomme généralement *joints*. Les joints exigent aussi la plus grande exactitude dans leur exécution ; car, la pression se transmettant d'un voussoir à l'autre perpendiculairement à la surface du joint, il est nécessaire que les deux pierres se touchent par le plus grand nombre possible de points..... »

Monge dit dans un autre passage que les joints d'un même voussoir doivent être rectangulaires entre eux. Il confond donc sous la dénomination générale de *joints* toutes les faces d'application des voussoirs. D'après cela, sa théorie de la transmission des pressions normalement au joint n'offre pas un sens bien clair.

Selon Prony, les voussoirs de deux cours ne doivent pas s'appuyer à nu les uns contre les autres, et Monge regarde comme *nécessaire* qu'ils se touchent par le plus grand nombre possible de points.

On voit que ces deux hommes célèbres ne sont jamais d'accord dans les questions relatives à l'art de l'ingénieur.

---

[*] *Papiers du baron de Prony*, portefeuille 50, dossier 1, pièce 21 *bis* (bibliothèque de l'École des Ponts et Chaussées).

Les raisonnements de Monge concernent un genre de maçonnerie dans lequel les pierres seraient posées sans cales ni mortier et devraient être à peu près polies. Les anciens ont employé cette méthode, et avant que l'usage des bons ciments se fût répandu, quelques auteurs ont conseillé d'y revenir pour éviter les tassements; mais de semblables procédés ne paraissent possibles que quand les faces d'application des voussoirs sont planes : or les considérations que Monge développe se rattachent à une théorie générale des joints courbes.

En fait, à l'époque où Monge a écrit, on posait les pierres d'appareil sur des cales ordinairement en bois et quelquefois en plomb. On fichait ensuite le mortier. Après le décintrement, la pression était transmise entre les voussoirs des différentes assises, par l'intermédiaire du mortier et des cales.

Je ne m'arrêterai pas à examiner les divers modes de pose employés maintenant. Cette question n'aurait ici aucun intérêt.

Le passage que j'ai reproduit pouvait donner de fausses idées aux commençants, et notamment les induire en erreur sur le degré d'exactitude nécessaire dans la taille des différentes faces d'un voussoir.

24. Je continue les citations :

« Quant aux convenances particulières, il y en a de plusieurs sortes, et notre objet n'est pas ici d'en faire l'énumération; mais il y en a une principale : c'est que les lignes de division des voussoirs qui, comme nous venons de le voir, sont de deux espèces [*], et qui doivent se rencontrer toutes perpendiculairement, doivent aussi porter le caractère de la surface à laquelle elles appartiennent. Or il n'existe pas de ligne sur la surface courbe qui puisse remplir en même temps toutes ces conditions que les deux suites de lignes de courbure, et elles les remplissent complétement. »

La Stéréotomie est une science positive; elle a pour base l'expérience, pour guides la Mécanique et la Géométrie. On ne peut sans de graves inconvénients introduire dans ses spéculations des appréciations vagues et incertaines comme celles qui précèdent.

---

[*] Monge dit en effet que certaines lignes divisent la voûte en assises, et d'autres une même assise en voussoirs; mais il se borne à cette simple énonciation.

25. On lit plus loin : « Avant la découverte des considérations géométriques sur lesquelles tout ce que nous venons de dire est fondé, les artistes avaient un sentiment confus des lois auxquelles elles conduisent, et, dans tous les cas, ils avaient coutume de s'y conformer. Ainsi, par exemple, lorsque la surface de la voûte était de révolution, soit qu'elle fût en sphéroïde, soit qu'elle fût en berceau tournant, ils divisaient ses voussoirs par des méridiens et par des parallèles, c'est-à-dire par les lignes de courbure de la surface de la voûte.

» Les joints qui correspondaient aux méridiens étaient des plans menés par l'axe de révolution ; ceux qui correspondaient aux parallèles étaient des surfaces coniques de révolution autour du même axe; et ces deux espèces de joints étaient rectangulaires entre eux, et perpendiculaires à la surface de la voûte. Mais, lorsque les surfaces des voûtes n'avaient pas une génération aussi simple, et quand leurs lignes de courbure ne se présentaient pas d'une manière aussi marquée, comme dans les voûtes en sphéroïdes allongés, et dans un grand nombre d'autres, les artistes ne pouvaient plus suffire à toutes les convenances, et ils sacrifiaient, dans chaque cas particulier, celles qui leur présentaient les difficultés les plus grandes. »

L'appareil d'une voûte en sphéroïde est déterminé par la direction de la pesanteur, et non par les courbures de la douelle.

Si l'intrados à peu près hémisphérique et limité à un plan de naissance horizontal appartenait à une surface de révolution dont l'axe s'inclinerait vers l'horizon de 45 degrés, on ne prendrait pas des méridiens ni des parallèles pour lignes d'appareil; on établtrait des assises horizontales divisées par des joints verticaux.

Les intrados sont soumis à de certaines conditions, tant pour leur forme que pour leur position par rapport à la direction verticale; mais on ne saurait trouver à ces surfaces un caractère général et précis qui puisse devenir la base d'une théorie sur la division d'une voûte en voussoirs. Il arrive que dans deux ou trois cas très-simples on prend des lignes de courbure pour lignes d'appareil. Cette circonstance méritait d'être signalée.

La dernière phrase du passage qui précède peut faire penser que les anciens appareilleurs ne procédaient qu'en hésitant: il n'en est rien. L'Art était parvenu à une grande perfection, en ce sens que l'on avait

des tracés sûrs pour les divers problèmes que présentait l'Architecture. De nouveaux besoins ont fait surgir des questions qui n'avaient été que peu ou point étudiées, et c'est alors que les incertitudes ont paru.

26. Ainsi que je l'ai déjà dit (art. **17**), Monge conclut que « *la division d'une voûte en voussoirs doit toujours être faite par les lignes de courbure de la surface de la voûte;* » mais il n'a pas cherché à appliquer cette règle. Les épures de coupe des pierres que l'on trouve dans la collection de l'École Polytechnique sont établies d'après les anciens traits. Ainsi, dans le *biais passé gauche*, l'*arrière-voussure de Marseille*, la *voûte d'arêtes en tour ronde* et l'*escalier vis à jour*, les lignes d'assise sur l'intrados gauche sont des droites; dans la *porte biaise rachetant un berceau cylindrique*, on voit des coupes obliques sur la douelle du grand berceau; le *biais passé cylindrique*, la *trompe biaise* [*], la *vis Saint-Gilles* présentent également des dispositions contraires à la règle des lignes de courbure.

Les quatre éditions de la *Géométrie descriptive* du célèbre géomètre contiennent l'article où l'emploi de ces lignes est prescrit d'une manière absolue, et chaque année on faisait à l'École Polytechnique un tirage des planches de la Collection, sans accommoder les appareils à la nouvelle théorie.

Lorsqu'on entreprend de le faire, on rencontre des difficultés de tout genre. Dans le *biais passé* et l'*arrière-voussure de Marseille*, par exemple, on trouve pour lits, au lieu de plans perpendiculaires aux têtes, des surfaces d'une description compliquée qui arrivent obliquement aux plans de tête; de sorte que cette méthode, qui se présente comme devant donner des angles droits et des joints d'un tracé facile, conduit quelquefois à des obliquités excessives et à des tailles impossibles.

Quant à la stabilité, il ne peut en être question. Se figure-t-on une lunette, une arche d'un grand biais ou un escalier à voussures rampantes ayant des appareils tout différents de ceux à l'aide desquels on parvient aujourd'hui à les établir?

27. En résumé, je crois que l'idée capitale de l'article de Monge

[*] L'exemple de la *trompe biaise* est particulièrement remarquable, parce que, d'après Eisenman, on expliquait aux élèves l'application de la loi des lignes de courbure à cette voûte (*Journal de l'École Polytechnique*, cahier III, p. 440).

est inadmissible; que les considérations secondaires sont les unes peu exactes, les autres dépourvues de précision; que les indications sur la construction des voûtes dénotent l'absence de connaissances suffisantes dans l'art de la maçonnerie; enfin que la conclusion est en contradiction avec les résultats les plus certains acquis à l'Architecture.

Je regarde d'ailleurs que cet article a une grande importance en ce qu'il permet d'apprécier les préoccupations sous l'empire desquelles Monge a établi l'enseignement géométrique de la coupe des pierres, et les conséquences de ses leçons pour l'instruction des élèves.

Dans un enseignement bien ordonné, chaque branche des connaissances est exposée après les études nécessaires, et avec tous les développements convenables. Les élèves comprennent alors les questions, et ne se laissent pas entraîner par des assertions gratuites.

Je crois devoir parler avec netteté, parce que la question est importante et qu'une discussion sérieuse me paraît indispensable.

28. J'ajouterai quelques mots, moins sur l'article de Monge que sur la question même de la division d'une voûte en voussoirs.

Les mortiers ont une grande importance pour la stabilité des voûtes. Les bons ciments dont on dispose aujourd'hui établissent une grande adhérence entre les pierres, et diminuent beaucoup le tassement [*]. On peut par suite adopter pour l'appareil des dispositions plus hardies, et, d'un autre côté, accepter plus facilement des voussoirs avec des crossettes, ou en état de charge.

Pour certains biais, une arche doit être établie avec des assises droites, si l'on a de bons ciments, et il est nécessaire de recourir à des assises hélicoïdales quand on ne dipose que de mortiers ordinaires.

On doit aussi avoir égard à la qualité et aux dimensions des pierres que fournissent les carrières.

Dans son article, Monge ne dit rien des mortiers. Les anciens auteurs, il est vrai, n'en parlent pas beaucoup, mais le point de vue est différent.

La Rue et Frézier écrivent pour des architectes; ils présentent une

---

[*] Les voûtes de plusieurs ponts récemment construits n'ont eu que des tassements insignifiants. Dans trois des cinq arches du pont de Tilsitt, élevé à Lyon par M. Kleitz, avec quelques soins particuliers, la clef n'a pas éprouvé d'abaissement appréciable (arc de cercle ayant $22^{m},84$ d'ouverture et $2^{m},75$ de flèche).

série d'appareils, et leurs ouvrages sont, en réalité, plutôt des Recueils que des Traités; Monge s'adresse à des commençants et prétend établir une théorie générale.

Comme professeur, j'expose des considérations sur la division d'une voûte en voussoirs, à la dernière leçon du cours, en faisant une revue des appareils. S'il me fallait résumer les règles dans une formule, je dirais, après Prony, que *l'on doit avoir égard aux conditions assez nombreuses qui dérivent des lois de la Statique, de la stabilité et de l'économie.*

Dans certaines constructions où la stabilité est facile à assurer, telles que les voûtes sphériques, on se préoccupe aussi quelquefois de l'effet que l'appareil produira pour la décoration.

Coupe des bois.

29. Pour les tracés de la charpente on emploie souvent un seul plan de projection, toujours horizontal, et l'on place au-dessus de lui, dans diverses positions, la pièce que l'on veut tailler. Les lignes ne sont pas reportées sur le bois de la même manière que sur la pierre. Les différences entre le trait de la charpente et celui de la coupe des pierres sont donc assez grandes au point de vue du métier; mais il n'y a pas de distinction sérieuse à faire sous le rapport de la Géométrie, et l'on a pu appliquer sans effort la Géométrie descriptive à la coupe des bois.

Cet art est moins intimement lié à la composition des charpentes que la coupe des pierres à l'établissement des maçonneries. Connaître les principes de la mise sur ligne et du piqué des bois, savoir les tracés des entures et des assemblages habituellement employés, déverser et délarder une pièce rectangulaire, établir l'épure d'une pièce courbe telle qu'un limon d'escalier, voilà ses parties essentielles [*]; je dois reconnaître qu'elles sont presque entièrement géométriques, et qu'on a pu, sans grand dommage, transporter la coupe des bois dans la Géométrie, et maintenir la composition des charpentes dans la Construction. Toutefois cette division d'un même art en deux parties,

---

[*] L'établissement des cintres des voûtes compliquées, et les constructions en charpente par lesquelles on cherche à imiter les voûtes en pierres, présentent quelques problèmes difficiles; mais ces questions se rattachent à la coupe des pierres.

dont les études sont ordinairement séparées par un assez long intervalle de temps, présente divers inconvénients que je crois utile de signaler.

50. Dans les épures d'exercice, qu'elles soient faites au crayon sur du papier ou à la craie sur un tableau, on est obligé d'employer deux échelles différentes, l'une pour les dimensions transversales des pièces, l'autre plus petite pour les longueurs. Sans cela, l'échelle unique que l'on devrait adopter, eu égard à l'étendue dont on dispose, réduirait tellement les petites parties des assemblages que la figure serait peu distincte [*].

Les dessins de la coupe des bois donnent ainsi aux élèves étrangers à la Construction des idées fausses sur les proportions des pièces. On peut sans doute tracer des brisures pour rappeler la convention faite; on peut aussi montrer des modèles en relief, et l'on ne néglige pas de le faire; mais, malgré ces soins, les épures de charpente établies avant toute étude d'Architecture conduisent, en général, à des appréciations inexactes sur les grandeurs.

51. Depuis que la coupe des bois est séparée de la composition des charpentes, certains auteurs ont introduit des tracés différents de ceux qui sont adoptés [**], et quelquefois on les a présentés aux élèves sans les prévenir de l'innovation. Je pourrais en citer plusieurs exemples; je me borne à indiquer l'emploi d'un paraboloïde dans le tracé des assemblages d'un limon d'escalier à courbe rampante.

Dans un Cours on doit exposer un art tel qu'il existe, sauf à signaler ses imperfections et à faire connaître les modifications qui paraissent utiles [***]. On aurait sans doute toujours observé cette règle pour la

[*] *Voir* les observations présentées sur ce sujet par Emy, au commencement du chapitre XIV de son remarquable *Traité de l'Art de la Charpenterie*.

[**] On lit dans M. Ch. Dupin : « Les épures de charpente de l'École Polytechnique doivent à M. Ferry les améliorations importantes qui les distinguent des tracés ordinaires des charpentiers. » (*Essai historique sur les services et travaux scientifiques de Gaspard Monge*, p. 249.)

Je crois que ces modifications n'ont pas été adoptées sur les chantiers.

[***] C'est ainsi que procèdent les ingénieurs qui ont écrit sur l'Art de la Charpenterie (*Voir* par exemple Emy, t. I, p. 500, et *passim*).

coupe des bois, si on l'avait enseignée au point de vue du métier; mais, du moment qu'elle faisait partie de la Géométrie, les tracés ne présentaient plus que des problèmes graphiques, que l'on croyait pouvoir modifier à son gré, sans se préoccuper de diverses circonstances collatérales dont la pratique seule révèle l'importance.

Monge voulait que l'on fît connaître aux élèves les tracés adoptés sur les chantiers. On lit en effet dans les *Développements* (art. 15, note) qu'un appareilleur et un charpentier distingués dans l'art du trait doivent être attachés à l'École, et donner en grand des leçons sur la coupe des pierres et la coupe des bois [*].

Ces idées témoignent d'excellentes intentions, mais l'enseignement a subi l'influence inévitable de la méthode adoptée.

En résumé, je pense qu'il n'est pas sans inconvénient d'enseigner la coupe des bois à des élèves complétement étrangers à l'Architecture, mais que cette disposition des études n'a eu aucune influence appréciable sur les développements de l'Art de la Charpente dans notre pays.

52. Monge a publié, dans le premier cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, un article où, par des considérations relatives à la coupe des bois, il cherche à justifier la méthode de l'enseignement préalable de la Stéréotomie.

« L'Art de la Charpenterie, dit-il, a, quant à son objet, le plus grand rapport avec celui de la coupe des pierres; quant aux moyens et aux

[*] Je ne veux pas discuter, dans ce travail, la question de l'utilité que peuvent avoir des exercices en grand sur la coupe des pierres et la coupe des bois; je me bornerai à indiquer l'opinion à laquelle j'ai été conduit par une étude attentive.

Je ne crois pas que l'on puisse établir avec avantage des travaux de ce genre dans une école qui n'aurait pas un caractère tout à fait industriel et à laquelle ne seraient pas annexés des chantiers permanents.

Je regarde comme très-utile de mettre des modèles entre les mains des élèves, mais je n'attache que peu d'importance à la taille de petits morceaux de bois ou de plâtre. Prony prescrivait de semblables exercices; ne voulant pas engager une discussion sur ce sujet, j'ai cru inutile de reproduire la partie de son programme qui y est relative.

Je suis convaincu que les élèves se familiariseront promptement avec les procédés pratiques du trait, si, après avoir reçu les explications qu'un professeur peut leur donner à l'amphithéâtre, ils ont des facilités pour suivre des travaux de construction dans leurs détails; tous les autres moyens d'instruction me paraissent insuffisants.

procédés d'exécution, il en est très-différent. Il n'y a pas d'art dans lequel la Géométrie ait été employée avec autant de succès; il n'y en a pas dans lequel on fasse autant de sacrifices à la loi de continuité; et, quelque extraordinaire que cela paraisse, on peut dire que la meilleure école préliminaire pour l'Architecture est l'étude de l'Art de la Charpenterie : il est, pour ainsi dire, une application continuelle des principes rigoureux de la Géométrie aux règles flexibles des convenances de plusieurs genres. »

Il me semble résulter de la première phrase, et même de tout le passage, qu'en disant « l'Art de la Charpenterie » Monge veut désigner *la coupe des bois*. Je trouve fort remarquable l'appréciation qu'il fait du trait de charpente considéré en lui-même; mais si, comme je le pense, il a entendu que la coupe des bois doit être enseignée avant toutes les autres parties de l'Architecture, je ne peux voir dans cette proposition qu'une assertion complétement gratuite.

La loi de continuité est évidente dans certains traits de la Charpenterie [*], mais j'avoue que je ne saisis pas bien son application à l'Architecture, même après avoir étudié les explications données par Eisenman sur ce sujet. (*Journal de l'École Polytechnique*, 3e cahier.)

DESSIN GÉOMÉTRIQUE.

53. J'ai dit (art. **16**) que diverses personnes regardent la connaissance du trait comme assez peu utile aux ingénieurs. Une opinion du même genre, mais moins répandue, existe, je crois, à l'égard du dessin. Je vais reproduire quelques lignes écrites par Navier sur cette question.

« M. Bruyère, qu'assurément personne n'accusera de n'avoir pas une idée juste de l'esprit que les ingénieurs doivent apporter dans l'exercice de leur profession, pensait qu'ils devaient former leur goût dans une étude assidue des arts du dessin, et se maintenir, comme il l'a fait lui-même, jusqu'aux derniers instants de sa vie, dans l'habitude d'exprimer leurs idées et d'en étudier les combinaisons par le moyen du dessin; méthode d'investigation bien plus puissante que celle qui

---

[*] Je crois que la *continuité* dont parle Monge est la disposition géometrique qui a pour expression, en Charpenterie, la *loi des homologues*. (*Voir* Emy, t. I, p. 496 et suiv.)

consisterait à se borner à une simple contemplation intellectuelle. Ajoutons que tous les ingénieurs qui ont acquis de la réputation en France dans le dernier siècle, MM. Perronet, de Cessart, Gauthey, ont agi d'après les mêmes principes, ainsi que les ingénieurs anglais les plus célèbres. » (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1833, 2e semestre.)

Je m'occuperai des différents modes de dessin géométrique. Le dessin pittoresque et le lavis sont utiles à l'ingénieur, mais ils ne rentrent pas dans le cadre de cette étude.

Perspective.

34. Le trait de Perspective comprend tous les tracés qui servent à établir, sur un plan, la projection conique d'un objet donné dans les conditions nécessaires pour obtenir une bonne représentation ; à faire sur cette projection les diverses constructions utiles dans le dessin, notamment la détermination des ombres; enfin à revenir d'une perspective aux figures géométrales, lorsque cela est possible. Les tracés des bas-reliefs dépendent encore du trait de Perspective. Je ne parle pas des tableaux courbes, parce qu'en général on les obtient en craticulant d'après des perspectives planes.

Ces opérations constituent un art important, très-utile à l'architecte, qui sur des figures géométrales ne pourrait apprécier que d'une manière imparfaite les effets que produira l'édifice qu'il a projeté. Les saillies disparaissent sur une élévation; on cherche, il est vrai, à les rendre sensibles, par des traits ressentis ou par des ombres, mais ces deux procédés sont insuffisants. D'un autre côté, dans le dessin ordinaire de l'Architecture, les diverses parties d'un édifice sont représentées sur des élévations distinctes, et, quand il y a des différences entre les décorations de deux façades contiguës, ce qui arrive souvent, on prévoit difficilement les contrastes et les harmonies qui se produiront dans une vue oblique.

35. En Perspective, l'exactitude relative doit être surtout recherchée. On peut, sans grand inconvénient, augmenter ou diminuer les dimensions d'un perron ou même le déplacer légèrement, mais les arêtes parallèles doivent converger vers un même point, et il est essentiel que les hauteurs des marches d'une part et leurs girons de

l'autre correspondent à des longueurs égales. Quand on dessine une arcade, l'œil n'aperçoit pas les petits défauts que peuvent avoir les courbes des deux têtes; mais il est choqué si ces lignes ne représentent pas dans l'espace des arêtes identiques.

La perspective des moulures a une grande importance; car, dans l'étude d'un édifice considérable, il est essentiel que l'architecte puisse apprécier l'effet que l'ornementation produira de différents points de vue. Or les lignes d'une corniche sont très-rapprochées les unes des autres, et des erreurs même peu considérables dans leurs positions relatives en perspective modifieraient d'une manière sensible la modénature.

D'après cela, pour que l'on obtienne de bons résultats, le trait doit présenter des constructions *bien liées*, c'est-à-dire telles qu'en général chacune des petites erreurs que l'on commet quand on opère rapidement déplace simultanément tous les points d'un groupe, et non pas un seul d'entre eux.

Il est ensuite à désirer que l'on ait des vérifications dans le cours du travail, pour que les inexactitudes soient promptement reconnues.

Les figures géométrales qui servent à l'établissement d'une perspective ont souvent des échelles différentes. Quelquefois certains détails d'une façade sont donnés à une échelle plus grande que l'élévation générale. Les tracés doivent pouvoir s'accommoder sans effort à ces diverses circonstances.

On voit que le trait de Perspective présente des difficultés d'une nature assez délicate. En Stéréotomie, les données sont toujours introduites de la même manière; on opère par épures régulières et sinon constamment rigoureuses, du moins complétement géométriques : les opérations graphiques de ces deux arts sont dans des conditions très-différentes.

56. Quand Monge s'est occupé de la Perspective, le trait de cet art n'avait pas atteint le degré de perfection et d'unité auquel celui de la coupe des pierres était parvenu; mais cependant plusieurs problèmes difficiles avaient été résolus. Ainsi l'on trouve de bons tracés pour la détermination directe des ombres sur un tableau, dans le Traité écrit en 1642 par un Parisien de la Compagnie de Jésus. L'ouvrage de Jeaurat, qui est de 1750, donne, de plus, la construction des images par réflexion

dans divers cas, et la détermination du contour apparent d'une surface, comme enveloppe des perspectives de ses lignes génératrices [*].

Monge, ayant érigé le trait de la coupe des pierres en trait universel, devait naturellement l'appliquer à la Perspective. Nous possédons de lui sur cette question un Mémoire qu'il a composé à Mézières [**], une leçon recueillie et publiée par Brisson et les épures de la Collection de l'École Polytechnique.

Lorsqu'un objet est déterminé par des figures géométrales, on peut par les procédés ordinaires de la Géométrie descriptive construire sa perspective sur un plan donné et pour un point de vue connu. Les tracés doivent être faits avec une grande exactitude, parce qu'ils manquent de ce genre de précision d'ensemble dont j'ai parlé à l'art. 35. Ils présentent d'ailleurs des difficultés d'une nature spéciale.

Presque toujours, dans le dessin d'un édifice, on représente deux façades. Or chacune d'elles est donnée par une élévation distincte : il faut en conséquence, pour établir une perspective, considérer des projections sur un plan horizontal et deux plans verticaux. Souvent le tableau n'est perpendiculaire à aucun de ces derniers.

Comme, d'ailleurs, le point de vue se trouve ordinairement en dehors de la feuille de dessin, et que les figures géométrales sont quelquefois à des échelles différentes, la méthode conduit à des tracés très-pénibles, dans la plupart des applications sérieuses. Il n'est pas possible de l'employer, quand on veut déterminer directement, sur un tableau, des ombres, des images par réflexion, des intersections de voûtes, etc. Enfin elle ne donne aucun procédé pour restituer les figures géométrales d'un objet, d'après sa perspective.

37. Les disciples de Monge ont développé sa méthode de Perspective; mais plusieurs d'entre eux en reconnaissaient les inconvénients.

En 1807, Hachette a publié, sur la *Méthode des points de concours*, c'est-à-dire sur l'ancien trait, un article qui contient le passage suivant :

« Dans l'enseignement de cet art (l'Architecture) tel qu'il se fait à

[*] Il est possible que l'on trouve ces traits dans des ouvrages plus anciens. Je n'affirme rien à cet égard.

[**] On doit la connaissance de ce travail à Olivier, qui l'avait trouvé dans les Archives de l'École de Metz (*Application de la Géométrie descriptive*, p. 161).

l'École Polytechnique, on emploie les dessins géométraux pour la composition des monuments, et l'on fait sentir aux élèves l'utilité des dessins perspectifs pour juger de l'effet des compositions. Il serait donc à désirer que ceux de Messieurs les élèves qui désirent cultiver plus particulièrement l'Architecture connussent les méthodes de perspective plus faciles et moins longues que la méthode générale qui est l'objet d'une partie de mon *Cours de Géométrie descriptive*. Je me suis proposé de leur faire connaître la méthode *des points de concours*. Les auteurs des Traités de Perspective l'ont bien indiquée, mais mon objet est d'éviter à nos élèves la lecture longue et pénible des livres qui ont été écrits sur cette matière, et de leur faire voir comment cette méthode pratique se déduit de nos principes de Géométrie aux trois dimensions. » (*Correspondance sur l'École Polytechnique*, vol. I, p. 313.)

Après avoir lu ce passage, on se demande pourquoi on n'enseignait pas à tous les élèves la *méthode pratique*, celle qui était *la plus facile et la moins longue*.

58. Vallée émet des opinions analogues à celles de Hachette, et les appuie de considérations très-judicieuses. En parlant de la méthode de Perspective par les procédés de la Géométrie descriptive, il dit :

« Elle est simple, facile à se mettre dans la mémoire, et la seule qui soit applicable aux tableaux courbes [*].

» Mais elle n'est pas sans inconvénients : elle exige, quand le point de vue est éloigné, des constructions très-étendues; elle donne une ligne droite par le moyen de points qui se construisent un à un, ce qui rend les petites erreurs inséparables de chaque opération, souvent très-préjudiciables à l'effet du résultat ; enfin on ne peut s'en servir facilement qu'en construisant préalablement des projections de l'objet sur lesquelles le tableau soit représenté d'une manière extrêmement simple.

» Ce dernier inconvénient est surtout très-grave.... » (*Science du dessin*, art. 217.)

Il est assez remarquable de voir une méthode aussi sévèrement critiquée par les auteurs mêmes qui l'exposent et la développent.

Les observations de Vallée, sur les petites erreurs qui deviennent

[*] J'ai déjà dit que l'on construit les perspectives sur tableaux courbes, en craticulant d'après des perspectives planes.

très-préjudicables à l'effet du résultat, confirment les observations que j'ai présentées à l'article 35.

39. Les idées de Monge sur la Perspective n'ont pas pénétré dans les Écoles de dessin ni dans les ateliers des artistes. Plusieurs auteurs ont publié des ouvrages dans lesquels l'ancien trait est exposé et appliqué à de nouveaux problèmes, notamment à la représentation des objets éloignés, question importante, dans laquelle les tracés ordinaires ne donnent pas une exactitude suffisante. L'art de la Perspective a ainsi continué de progresser dans notre pays.

Les établissements peu nombreux dans lesquels la méthode par la Géométrie descriptive a été adoptée n'ont pas obtenu, je crois, des résultats bien avantageux. Les élèves ont appris à discuter les formes singulières que présentent les cônes circonscrits aux surfaces, mais ils ne se sont pas familiarisés avec les tracés pratiques [*].

Les conséquences sont faciles à apprécier.

Les ouvrages écrits sur l'Art des constructions dans le dernier siècle contiennent, en général, des perspectives qui en facilitent beaucoup l'étude [**], et l'on ne trouve plus que des figures géométrales dans les ingénieurs de l'école de Monge.

La photographie ramène les perspectives; elle rend de grands services, mais on ne peut l'employer que pour représenter un objet qui existe, vu d'un point dont l'accès est facile.

La perspective par le trait permet seule à un ingénieur d'apprécier et de faire facilement comprendre le caractère et les dispositions de l'édifice qu'il a projeté, et de dessiner l'édifice qu'il a construit, du point de vue (accessible ou inaccessible) d'où l'on en saisit le mieux l'ensemble et les principaux détails.

40. La Perspective ne doit pas être séparée du Dessin. La recherche

---

[*] Dans les exercices que présentent certains auteurs, on trouve les procédés de Monge combinés avec l'ancien trait. Les tracés ainsi obtenus ne mériteraient quelque attention que s'ils formaient une méthode, ce qui n'est pas.

Je crois que le seul résultat de ces tentatives a été de jeter de la confusion dans l'esprit des élèves.

[**] *Voir* Régemortes, Cessart, Perronet, Pitrou, etc.

de la *distance* la plus convenable dans chaque cas, la discussion des apparences qu'un même tableau présente à divers spectateurs, l'étude des dérogations qui peuvent être nécessaires doivent, je crois, tenir une place importante dans l'enseignement. On ne peut apprécier des tracés que lorsqu'on s'est rendu compte des erreurs que l'œil reconnaît le plus facilement. Je pense, par suite, qu'il y aurait de graves inconvénients à considérer la Perspective comme une simple branche de la Géométrie.

Cela paraît cependant avoir été fait à l'École Polytechnique; car on lit dans les *Développements* : « Elle (la Perspective linéaire) est entièrement du ressort de la Géométrie descriptive; les règles générales en sont simples; on peut facilement les apprendre dans un jour et se les rendre familières dans un mois ».

Je crois qu'il est plus difficile que ne le pensait Monge d'apprendre la Perspective. Il ne suffit pas de connaître les principes d'une bonne méthode, il faut encore en faire des applications variées et assez nombreuses. Si l'on voulait que cet art fût connu des ingénieurs, on devrait demander aux élèves de joindre aux figures géométrales, et suivant les circonstances, des vues de différents genres (de front, obliques, à vol d'oiseau, cavalières), dans leurs exercices d'Architecture et de Construction [*].

Les hommes qui embrassent la carrière d'ingénieur sont laborieux et intelligents. Ils peuvent tous apprendre le dessin géométrique, qui n'exige pas, comme le dessin pittoresque, un sentiment artistique développé. Si sur ce point leur instruction laisse à désirer, c'est que l'enseignement est défectueux.

---

[*] Dans l'enseignement établi par Monge, on demandait aux élèves une série d'efforts sur différents sujets que l'on abandonnait ensuite entièrement (*voir* les *Développements*). Tous les Arts graphiques étaient compris dans un cours de la première année, et dans la suite des études on ne devait plus parler du trait (art. 15, note). Après un mois, l'enseignement de la Perspective était considéré comme complet; de même pour les ombres, etc. Je crois que cette méthode présente de graves inconvénients. Il s'agit ici beaucoup moins de la quantité de travail à demander aux élèves que de sa répartition.

Perspective cavalière.

41. Les machines, les voussoirs, les pièces de charpente en fer ou en bois ont quelquefois des formes compliquées, dont on doit se rendre un compte exact et que les figures géométrales n'indiquent pas d'une manière suffisamment claire.

Pour cette étude des formes, les anciens architectes employaient souvent le mode de projection oblique, connu sous le nom de *Perspective cavalière*. La Rue en donne des exemples remarquables : sur chacune des planches de son Traité de coupe des pierres, il a placé de belles perspectives qui représentent des voussoirs dont la taille est parvenue à divers degrés d'avancement. Les lignes de front sont à l'échelle des figures géométrales, et les lignes fuyantes ne sont pas réduites. Ces dispositions rendent les comparaisons très-faciles.

Un *Traité des Ombres*, provenant de Mézières et publié par Olivier, qui l'avait trouvé dans les archives de l'École de Metz, nous apprend que, sur les épures de charpente de l'ancienne École du Génie, on avait employé avec succès la Perspective cavalière, pour indiquer la forme des pièces (*Applications de la Géométrie descriptive*, p. 9).

42. Monge et ses disciples n'ont rien écrit sur la Perspective cavalière, mais, en fait, ils la repoussaient [*].

Les épures de Stéréotomie de la collection de l'École Polytechnique ont été extraites de l'ouvrage de La Rue et des cahiers manuscrits de l'École de Mézières [**]. Ces dessins portaient les uns et les autres des perspectives cavalières; elles furent toutes supprimées. On tâchait de suppléer par des modèles au manque de clarté des épures.

Les reliefs sont certainement utiles pour les études de Stéréotomie, mais dans un amphithéâtre ils présentent de graves inconvénients : afin de rendre les voussoirs maniables, on est obligé de les réduire

[*] Quelques auteurs de l'école de Monge ont employé, dans diverses circonstances, des figures qui ont une apparence de Perspective cavalière, mais ils ne font pas connaître les tracés à l'aide desquels ils les ont établies, et l'on peut douter qu'ils se soient assujettis à une règle précise.

On trouve des figures de ce genre dans la *Géométrie descriptive* de Monge.

[**] *Voir* la préface de la *Géométrie descriptive* de Hachette.

considérablement, et alors quelques-unes de leurs parties deviennent trop petites pour être facilement distinguées par tous les auditeurs. Il est d'ailleurs quelquefois difficile de saisir la concordance des diverses arêtes du modèle avec les lignes de l'épure, par suite de la différence des proportions.

Lorsqu'un professeur établit géométriquement des perspectives cavalières en expliquant les tracés, il faut comprendre à la fois l'agencement des différentes faces du voussoir, l'ordre des opérations de la taille et l'emploi de figures spéciales pour discuter des formes compliquées.

43. Le rejet de la Perspective cavalière me semble être une conséquence naturelle de la doctrine de Monge.

Ce mode de dessin a un trait qui lui est propre. Le trait de la coupe des pierres étant érigé en trait universel, il fallait ou abandonner la Perspective cavalière, ou en faire tous les tracés par les procédés généraux de la Géométrie descriptive, ce qui introduisait une complication extrême. Le choix ne pouvait être douteux.

De nouveaux modes de perspective rapide qui, dans mon appréciation, ne présentent pas autant d'avantages que la Perspective cavalière, se sont répandus depuis un certain nombre d'années en Angleterre et en Allemagne. Les ingénieurs de ces pays savent en tirer un excellent parti.

La Perspective conique est préférable sans doute à tout autre mode de dessin, quand on veut apprécier l'effet que produira un édifice; mais, lorsqu'on se propose seulement d'étudier l'agencement des différentes pièces d'une machine ou des parties d'une construction, une figure cavalière me paraît plus avantageuse, parce qu'on l'établit facilement et qu'elle peut être accompagnée d'une échelle.

Représentations ombrées.

44. La détermination des ombres dépend du trait spécial du dessin sur lequel on opère. Les procédés de la Géométrie descriptive s'appliquent immédiatement au tracé des lignes d'ombre sur les figures géométrales. Pour un tableau, il faut recourir au trait de Perspective.

Dans le dessin géométral, les ombres sont employées pour suppléer à l'insuffisance des indications que fournit une figure considérée isolément, et en rendre l'intelligence plus facile.

Ce résultat n'est pas obtenu quand les objets ont des formes compliquées : le tracé des ombres est alors laborieux et il devient difficile de les interpréter.

Quelques dessinateurs ne représentent pas toutes les ombres portées. Je comprends bien qu'on puisse modifier légèrement les contours obtenus lorsqu'ils ont une forme bizarre ; mais une convention par laquelle on indique certaines ombres, tandis qu'on en supprime d'autres qui sont tout aussi apparentes, ne me semble satisfaisante sous aucun rapport. Après avoir étudié un grand nombre de dessins, je suis arrivé à conclure qu'il est convenable de ne marquer les ombres que lorsqu'on peut le faire d'une manière rationnelle, sans introduire de la confusion.

L'école de Monge a adopté l'emploi des figures géométrales ombrées, sans doute parce que dans ce mode de dessin les tracés sont de simples applications des procédés ordinaires de la Géométrie descriptive.

Dans la Perspective cavalière, les ombres se développent sur les différents plans de front et ne produisent, en général, aucune confusion.

Une grande exactitude n'est jamais nécessaire dans les problèmes d'ombre, et les tracés réellement utiles sont simples, au moins lorsqu'on opère sur des figures géométrales ou cavalières.

45. Monge s'est occupé de la direction qu'il convient de donner aux tailles, qui, dans la gravure en taille-douce, servent à exprimer les ombres et le modelé. Il affirme que les contours les plus propres à donner une idée de la courbure d'une surface sont les projections de ses lignes de courbure. Le célèbre géomètre n'a présenté, du reste, aucun raisonnement à l'appui de son assertion.

Les intensités relatives des teintes aux différents points d'un corps dépendent non-seulement de la forme de la surface, mais encore de sa position par rapport au spectateur, et de la direction des rayons de lumière. D'après la loi de Monge, ces deux dernières circonstances pourraient influer sur la largeur et l'espacement des tailles, mais non sur leur forme. Il me semble que l'on ne devrait accorder quelque attention à un semblable résultat, si les disciples du grand géomètre en avaient donné une explication plausible, ou une vérification d'après les œuvres des bons artistes.

Je crois que l'article de Monge n'a eu aucune influence sur l'art de la Gravure, mais on le reproduit encore dans des ouvrages didactiques, ce que je regarde comme regrettable.

ARTS GRAPHIQUES DIVERS.

46. J'ai adopté dans ce Mémoire l'expression d'*Arts graphiques* parce qu'elle est employée, mais je la trouve assez impropre ; elle correspond à l'idée d'après laquelle des arts ayant tous une partie graphique plus ou moins importante, et d'ailleurs de natures très-diverses, avaient été compris dans le cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique [*].

Cette disposition offrait, je crois, l'inconvénient de donner dans l'enseignement un rôle trop considérable à la Géométrie. La Gnomonique et la Géographie ne se présentent pas avec le même caractère lorsqu'on les regarde comme des branches de la Géométrie descriptive ou comme des dépendances de l'Astronomie et de la Géodésie.

La Géographie emploie plusieurs modes de projection, et chacun d'eux a un trait particulier. On ne voit pas bien comment on pouvait rattacher tous ces traits à celui de la coupe des pierres, suivant la conception de Monge.

Je ne veux pas présenter ici une étude sur l'enseignement de la Géographie et de la Gnomonique, parce que ces sciences, considérées au point de vue des opérations graphiques, ne sont pas utiles à l'ingénieur pour ses travaux ordinaires.

Par suite des progrès de l'horlogerie et du développement de la télégraphie électrique, les cadrans ont perdu une grande partie de leur importance. On n'enseigne actuellement la Gnomonique que dans un petit nombre d'établissements, et partout, je crois, on l'a rattachée à l'Astronomie ; c'est là sa véritable place.

---

[*] On lit dans le programme du cours de *Géométrie descriptive pure*, annexé au Rapport du Conseil de perfectionnement, du 3 nivôse an IX : « Cette partie de la *Géométrie descriptive* comprendra les principes, la Coupe des pierres, la Charpente, les Ombres, la Perspective, la Géométrie, le Lavis, la Géographie, la Gnomonique et l'application de l'Analyse à la Géométrie des trois dimensions.

On a également séparé de la Géométrie descriptive, avec beaucoup de raison, la Géographie et le Lavis, qui y étaient compris dans l'organisation de Monge.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

17. Je crois avoir établi qu'on ne doit pas résoudre par une même méthode les problèmes que présentent les différents arts graphiques; mais, l'idée d'un trait universel étant rejetée, il reste à rechercher si l'enseignement de chaque art doit être divisé en deux parties comprenant: la première, l'exposition abstraite du trait, et la seconde son application.

J'examinerai d'abord cette question pour la coupe des pierres.

Par suite des travaux de Monge et de Lacroix, la partie géométrique de la Stéréotomie proprement dite [*] est extrêmement simplifiée. La coupe des pierres, réduite pour les tracés à une description des appareils, peut être séparée de la Géométrie et rattachée à la Construction. Ce résultat serait, je crois, très-avantageux.

Si l'enseignement de la Stéréotomie doit rester purement géométrique, l'exposition préalable du trait ne me paraît pas très-utile. Ce mode d'enseignement permet, il est vrai, de discuter sur un petit nombre de questions les diverses combinaisons graphiques que les tracés peuvent offrir, mais il présente en lui-même bien plus de difficultés. Lorsqu'on s'occupe directement des appareils, plusieurs des parties les plus importantes de l'épure sont d'une évidence intuitive. Ainsi un commençant conçoit immédiatement ce que sont le plan et l'élévation d'une voûte, et comment on peut établir ces deux figures sur une même feuille, tandis qu'on est obligé de recourir à de minutieuses explications pour faire comprendre le rabattement du plan vertical sur le plan horizontal.

---

[*] Autrefois l'expression de Stéréotomie ne désignait pas seulement la coupe des pierres et des bois, mais aussi le trait considéré en lui-même (*Voir* Frézier, La Rue, etc.). Cette signification a été conservée pendant quelque temps après les travaux de Monge. Ainsi Hachette et Prony parlent de la « Stéréotomie appliquée aux ombres et à la perspective. »

18. Ce que je viens de dire concerne l'enseignement dans les écoles. Je crois que, lorsqu'on s'adresse à des tailleurs de pierres, il est toujours préférable de laisser de côté la Géométrie descriptive et d'expliquer les tracés de la Stéréotomie aussitôt après avoir fait connaître les principaux théorèmes de la Géométrie du plan et de l'espace. Les ouvriers ont, en effet, quelquefois de la peine à saisir les abstractions; comme d'ailleurs ils connaissent les constructions, il n'y a aucun motif de retarder pour eux l'enseignement de la Stéréotomie.

On suit souvent une marche différente de celle que je viens d'indiquer, mais je doute que les résultats soient bien satisfaisants.

Vallée a écrit, en 1853 : « Les arts qui tiennent au dessin linéaire, à la perspective, aux ombres, ont fait d'immenses acquisitions...; mais nous avons à regretter, il faut le reconnaître, quelques bonnes pratiques qui s'exerçaient autrefois par le compagnonnage.... Aussi, depuis la suppression des maîtrises, ne s'est-il formé que peu d'appareilleurs aussi instruits que ceux que l'on avait auparavant. » (*Spécimen de la coupe des pierres*, p. 120, 121.)

Vallée était un des disciples les plus dévoués de Monge; il avait eu une carrière très-active dans les Ponts et Chaussées, et, par suite, il connaissait bien les chantiers. J'attache beaucoup d'importance à son témoignage sur la diminution du nombre des bons appareilleurs, pendant que la Géométrie descriptive se répandait de plus en plus.

La constitution de cette branche de la Géométrie a coïncidé avec la suppression des maîtrises. Il est difficile d'apprécier l'influence de chacune de ces deux circonstances dans les résultats obtenus. Je n'ai pas à m'occuper des maîtrises en elles-mêmes, mais je crois que les méthodes adoptées pour l'instruction dans le compagnonnage ne sont pas à dédaigner. Je suis convaincu qu'au lieu de fatiguer les ouvriers par des études abstraites, comme on le fait quelquefois, il vaut mieux leur expliquer les tracés des voûtes qu'ils construisent.

La question a de l'importance : si d'un côté les ingénieurs s'occupent seulement des grands problèmes de l'Architecture (art. **16**), et que de l'autre les méthodes suivies pour l'instruction des ouvriers ne produisent pas de bons appareilleurs en nombre suffisant, l'art des constructions souffrira évidemment.

Ces observations concernent exclusivement la coupe des pierres; la

charpenterie n'a jamais manqué de bons contre-maîtres, parce que les tracés étant faits, non dans des salles d'épure, mais sur le chantier même, sous les yeux des ouvriers, ceux d'entre eux qui ont de l'intelligence et de l'application sont bientôt familiarisés avec le trait.

49. Jusqu'à présent les différents tracés de la Perspective et leur application ont été exposés dans les mêmes ouvrages. Cette méthode me paraît bonne. Si l'on présentait une étude abstraite du trait de Perspective dans son ensemble, il serait à craindre que cette Géométrie ne reçût peu à peu des développements qui seraient sans utilité pour la pratique et qui surchargeraient l'enseignement.

Les perspectives rapides ne présentent pas de tracés difficiles. Lorsque les élèves ont étudié la Géométrie descriptive, on peut leur exposer brièvement tout ce qu'il y a d'utile dans ces divers modes de représentation en faisant ressortir leurs différences.

50. En résumé, je crois que, pour enseigner un art graphique, il n'est nullement nécessaire d'en exposer d'abord le trait; mais que cette méthode présente des avantages certains, lorsqu'on s'adresse à des hommes habitués aux considérations abstraites; elle permet, notamment, de dégager de la Géométrie l'exposition de l'art, de manière que ses conditions essentielles restent plus apparentes. D'un autre côté, on peut craindre qu'un trait étant séparé de l'art auquel il se rapporte, on ne lui donne dans l'enseignement une extension peu utile. Dans tous les cas, il importe de faire remarquer aux élèves que la coordination des tracés d'une même méthode graphique ne constitue pas une création, et que les personnes qui veulent bien connaître le trait doivent remonter aux sources et lire les anciens ouvrages.

Les disciples de Monge étaient dans des idées très-différentes.

51. Il n'est pas sans intérêt de rappeler comment le grand géomètre appréciait son enseignement. En parlant des leçons qu'il avait données à l'École Polytechnique, au commencement de l'an IV, il dit : « Dans le Cours préliminaire, on a eu occasion, pour la Stéréotomie elle-même, comme pour toutes les autres parties de l'enseignement, de développer plusieurs idées neuves, générales et fécondes; en sorte que ce Cours, considéré dans toutes les parties qui l'ont composé, a été réellement une

des choses extraordinaires que la Révolution a produites en si grand nombre. » (*Journal de l'École Polytechnique*, cahier I, p. 10.)

Les élèves partageaient cet enthousiasme calme; ils croyaient que les Arts graphiques ne présentaient avant Monge qu'incertitude et confusion, et ils pensaient avoir des méthodes et des principes propres à lever toutes les difficultés.

Ainsi, après avoir présenté sur la Perspective quelques considérations des plus élémentaires, Brisson ajoute : « Ces diverses observations suffisent pour mettre les personnes qui sont au courant de la Géométrie descriptive en état d'abréger, dans un grand nombre de cas, et de simplifier beaucoup les opérations qu'exige la pratique de la Perspective linéaire. »

Les élèves de Monge ne traitent pas l'ancienne Stéréotomie mieux que l'ancienne Perspective. Cependant, sans sortir de Paris, on peut voir un grand nombre de constructions qui datent des XVII[e] et XVIII[e] siècle, et indiquent un art très-avancé. Nos bibliothèques contiennent une série de bons ouvrages sur la coupe des pierres et la coupe des bois, à partir du *Traité d'Architecture* de Philibert de l'Orme. Quelques-uns des anciens traits ont dû être corrigés; mais ces améliorations sont d'une importance secondaire, et les seuls progrès considérables de la Stéréotomie consistent dans des appareils pour des constructions d'un genre nouveau.

Desargues, qui vivait dans le XVII[e] siècle, a résolu les problèmes les plus difficiles comme mécanisme de projection.

En 1728, l'architecte de La Rue a employé le trait de la coupe des pierres pour diverses questions de Géométrie, telles que l'intersection du cône et du cylindre oblique par un plan, le développement de ces surfaces, le tracé des courbes transformées, etc.

Leroy ne connaissait probablement pas ces travaux, lorsqu'en parlant du livre de Frézier, dont le premier volume n'a été publié qu'en 1737, il a écrit : « Cet ouvrage, qui eut un grand succès à l'époque où il parut, mérite bien encore d'être étudié; et pour conserver à Frézier la part qui lui revient dans les progrès de la Science, il est juste de faire remarquer qu'il employait déjà les projections horizontales et verticales pour définir les voussoirs. » (*Traité de Stéréotomie, Avertissement.*)

Frézier employait ces projections comme tous les auteurs qui ont écrit sur la Stéréotomie avant ou après lui. On ne connaît pas d'autre méthode pour les tracés de la coupe des pierres.

Je ne peux du reste que me joindre à l'opinion de Leroy sur le mérite de Frézier. Ce savant ingénieur a donné l'explication géométrique de tous les traits et même de la *manière* de Desargues, qui n'avait pas été comprise par ses contemporains; il a corrigé plusieurs inexactitudes dans les tracés adoptés; enfin on lui doit la solution de diverses questions très-délicates que La Rue n'avait pas abordées, notamment la détermination des points d'inflexion de la transformée par développement de la base d'un cône oblique.

Si Olivier avait suivi le sage conseil de Leroy, s'il avait lu les observations de Frézier sur la manière de Desargues, il n'aurait pas proposé le changement des plans de projection, comme procédé général de solution pour les problèmes de la Géométrie descriptive, sans chercher à réfuter les critiques dont cette méthode avait été l'objet [*].

CONCLUSION.

52. Lorsqu'on examine les premiers documents relatifs à l'École Polytechnique, on voit que ses fondateurs regardaient les Arts graphiques comme ayant pour l'ingénieur une importance extrême, et qu'ils voulaient donner à leur étude une vive impulsion.

Sous tous les autres rapports l'École Polytechnique a largement répondu aux espérances que sa création avait fait naître; mais, dans ma conviction, le but spécial que je viens d'indiquer n'a pas été atteint. Comme d'ailleurs beaucoup d'établissements d'instruction ont adopté les méthodes introduites par Monge dans cette École célèbre, mes observations concernent d'une manière générale l'état des Arts graphiques, dans notre pays, pour tous les travaux de la Construction et de l'Industrie.

On remarque sur divers points des indices d'une utile réaction contre les idées de Monge, mais la situation est toujours à peu près la même pour la Stéréotomie : on parle encore quelquefois avec éloge des

---

[*] J'ai examiné cette question dans l'Avant-Propos de mon *Traité de Géométrie descriptive*.

lignes de courbure, et beaucoup de personnes pensent que la coupe des pierres et la coupe des bois doivent être enseignées avant les premiers éléments de l'Architecture. Je crois même voir une tendance à abandonner les petites modifications qui ont pu être faites dans le sens des idées de Prony.

Il importe de savoir si la coupe des pierres appartient à la Géométrie pure ou à l'Art des maçonneries. Dans sa session de l'an IX, le conseil de perfectionnement de l'École Polytechnique a prononcé sans donner aucune explication, et la question est restée au point où l'a laissée la protestation de Prony.

Une opinion soutenue par celui qui, d'après Arago, était en France « la personnification de l'Art de l'ingénieur » mérite d'être examinée.

Je sais que Prony n'a pas recommencé la lutte, bien qu'aux deux réorganisations de l'École Polytechnique, dans les années 1816 et 1830, les circonstances pussent paraître favorables sous un certain point de vue; mais il est facile d'expliquer son silence.

En 1816, l'École, création d'une assemblée révolutionnaire, était discutée, et il y avait de la sagesse à ne pas soulever des difficultés sur son enseignement. Ensuite Prony était en disgrâce [*].

En 1830, Prony faisait partie de la Commission de réorganisation. J'ignore le langage qu'il y a tenu : il parcourait sa soixante-seizième année, et se trouvait en présence de disciples de Monge qui ont sans doute défendu l'œuvre de leur maître, si elle a été attaquée.

La situation d'ailleurs s'était bien modifiée. Il ne s'agissait plus de maintenir et de développer une bonne méthode; il eût fallu réagir contre des idées acceptées et des habitudes prises.

J'ai cherché si l'on pourrait trouver quelque indication sur la pensée de Prony dans la manière dont le souvenir de son opposition au mode d'enseignement établi par Monge a été conservé.

Les deux éditions des discours de l'an VII et de l'an VIII (art. 5 et 7) sont dans le tome IV des *Opuscules*. Ce volume contient diverses pièces

---

[*] Prony, professeur à l'École Polytechnique depuis sa fondation, ne fut pas compris dans le corps enseignant établi pour cette École, par l'ordonnance du 5 septembre 1816. La démission de Legendre permit heureusement de le rappeler après un court délai (25 septembre).

Il était vivement blessé de l'injure qui lui avait été faite (*voyez* ARAGO).

de 1829, dont une de la fin de l'année (*Les paroles prononcées le 5 décembre sur la tombe de Lemasson*).

On voit que Prony a arrêté au plus tôt en 1830 la composition du quatrième volume des *Opuscules* (*). En insérant ses discours, et notamment la brochure de l'an IX, dans une collection qui devait attirer l'attention des ingénieurs, il voulait sans doute empêcher ces pièces de tomber dans l'oubli ; il eût pu facilement les faire disparaître : je n'en connais aucun exemplaire en dehors de l'École des Ponts et Chaussées.

Je pourrais peut-être dire que Prony a affirmé sa protestation après 1829 ; je me borne à conclure qu'aucun indice ne donne lieu de supposer qu'il ait modifié son opinion dans la dernière partie de sa carrière.

Le temps a d'ailleurs apporté de nouveaux éléments à la discussion ; il ne s'agit plus seulement de savoir quelles sont les véritables bases de l'art d'appareiller les voûtes, mais encore de rechercher quels résultats a donnés la méthode d'enseignement introduite par Monge il y a quatre-vingts ans.

Enfin je regarde comme nécessaire que l'œuvre de Monge pour l'enseignement soit examinée dans toute son étendue ; non que je désire des changements brusques, ni même que je les croie possibles, mais parce qu'on ne pourra espérer des améliorations continues dans l'étude des Arts graphiques que si l'opinion des ingénieurs est fixée sur le but à atteindre.

(*) La pagination des quatre volumes et les tables des deux derniers sont de la main de Prony. La reliure a été faite après sa mort ; on pense qu'elle remplace des cartonnages qui dataient de diverses époques. La place naturelle des discours de l'an VII et de l'an VIII était dans le premier volume, près du *Plan d'instruction*.

On ne trouve dans les *Opuscules* aucun écrit postérieur à 1830 ; ainsi on n'y voit pas le *Rapport sur un projet de barrages* que Prony a publié dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, en 1831 (1er semestre).

D'après cela, on peut penser que le quatrième volume a été composé en 1830, ou au commencement de 1831. Ne serait-ce pas après un effort infructueux près de la Commission de réorganisation que Prony aurait pris la résolution de conserver les témoignages de sa lutte avec Monge ?

Paris, 19 janvier 1874.

SUR LES VALEURS LIMITES DES INTÉGRALES;

Par M. P. TCHEBICHEF.

(Lu au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, à Lyon.)

Dans un Mémoire très-intéressant, sous plus d'un rapport, que M. Bienaymé a lu à l'Académie des Sciences, en 1833, et que l'on trouve imprimé dans les *Comptes rendus*, et reproduit dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville (2e série, t. XII, 1867), sous le titre : *Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés*, l'illustre savant donne une méthode qui mérite une attention toute particulière. Cette méthode consiste dans la détermination de la valeur limite de l'intégrale

$$\int_0^a f(x)\,dx,$$

d'après les valeurs des intégrales

$$\int_0^A f(x)\,dx, \quad \int_0^A x f(x)\,dx, \quad \int_0^A x^2 f(x)\,dx,$$

où $A > a$ et $f(x)$ une fonction inconnue, assujettie seulement à la condition de garder le signe $+$ entre les limites d'intégration. La démonstration simple et rigoureuse de la loi de Bernoulli, que l'on trouve

dans ma Note, sous le titre : *Des valeurs moyennes* [*], n'est qu'un des résultats que l'on tire aisément de la méthode de M. Bienaymé, et d'après laquelle il est parvenu lui-même à démontrer une proposition sur les probabilités, d'où la loi de Bernoulli découle directement.

En cherchant à tirer tout le parti possible sur les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

des valeurs des intégrales

$$\int_A^B f(x)\,dx,\quad \int_A^B xf(x)\,dx,\quad \int_A^B x^2 f(x)\,dx,\quad \int_A^B x^m f(x)\,dx,$$

où l'on a

$$A < a,\quad B > b,$$

et où $f(x)$ reste positive, je suis parvenu à reconnaître que ces recherches conduisent à des théorèmes d'un nouveau genre, concernant le développement de l'expression

$$\int_A^B \frac{f(x)}{z-x}\,dx$$

en fraction continue, qui joue un si grand rôle dans la théorie des séries. Voici, par exemple, un de ces théorèmes :

Si $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ *est une des fractions convergentes de* $\int_A^B \frac{f(x)}{z-x}\,dx$, *que l'on trouve en développant cette expression en fraction continue*

$$\cfrac{1}{\alpha z+\beta+\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1+\cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2+\cdots}}},$$

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, de M. Liouville, 2e série, t. II.

et que

$$z_1,\ z_2,\ldots,\ z_l,\ z_{l+1},\ldots,\ z_{n-1},\ z_n,\ldots,\ z_m$$

soient les racines de l'équation

$$\psi(z) = 0,$$

rangées suivant leur grandeur : toutes les fois que la fonction $f(x)$ reste positive entre les limites $z = A$, $z = B$, la valeur de l'intégrale

$$\int_{z_l}^{z_n} f(x)\,dx$$

surpasse la somme

$$\frac{\varphi(z_{l+1})}{\psi'(z_{l+1})} + \frac{\varphi(z_{l+2})}{\psi'(z_{l+2})} + \ldots + \frac{\varphi(z_{n-2})}{\psi'(z_{n-2})} + \frac{\varphi(z_{n-1})}{\psi'(z_{n-1})}$$

et reste au-dessous de celle-ci :

$$\frac{\varphi(z_l)}{\psi'(z_l)} + \frac{\varphi(z_{l+1})}{\psi'(z_{l+1})} + \ldots + \frac{\varphi(z_{n-1})}{\psi'(z_{n-1})} + \frac{\varphi(z_n)}{\psi'(z_n)}.$$

Comme exemple des problèmes qu'on parvient à résoudre par cette méthode, je citerai celui-ci :

Étant donnés la longueur, le poids, le lieu du centre de gravité et le moment d'inertie d'une droite matérielle de densité inconnue et variable d'un point à l'autre, trouver les limites les plus proches du poids d'un tronçon de cette droite.

En supposant qu'il s'agisse d'évaluer le poids d'un tronçon de la ligne compté d'un de ses bouts, dont la distance du centre de gravité est égale à d, et en désignant par l, p la longueur et le poids de la ligne entière, par k son moment d'inertie autour de l'axe passant par son centre de gravité et perpendiculaire à elle, par x, z la longueur et le poids du tronçon en question, on parvient à cette solution :

Tant que x est au-dessous de $d - \dfrac{k}{(l-d)p}$, le poids z reste compris

entre zéro et $\frac{kp}{(d-x)p+k}$; dans le cas où x surpasse $d+\frac{k}{dp}$, ce poids reste entre les limites p et $\frac{(d-x)^2 p}{(d-x)p+k}$; enfin, si x reste compris entre $d-\frac{k}{(l-d)p}$ et $d+\frac{k}{(l-d)p}$, la valeur de ce poids est comprise entre les quantités $\frac{(x-d)(l-d)p+k}{lx}$, $\frac{(l+d-x)(l-d)p-k}{l(l-x)}$.

Sur la Méthode d'intégration de M. Tchebichef;

PAR M. G. ZOLOTAREFF,
de Saint-Pétersbourg.

Dans une Note insérée dans le *Bulletin de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg* [*], M. Tchebichef a fait connaître, sans démonstration, sa méthode d'intégration de la différentielle

$$\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}},$$

où α, β, γ, δ désignent des nombres rationnels. Suivant la marche indiquée par M. Tchebichef, on obtient cette intégrale une fois qu'il est possible de l'exprimer en termes finis; on démontre, dans le cas contraire, l'impossibilité d'une pareille expression.

Cette Note de M. Tchebichef a été réimprimée dans le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville (1864, p. 225 et suiv.). Il est aisé de voir, d'après les recherches d'Abel et de Jacobi, que cette méthode est liée intimement au développement du radical

$$\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta},$$

en fraction continue et aux fonctions elliptiques.

En étudiant cette liaison, je suis parvenu non-seulement à démontrer la méthode de M. Tchebichef, mais encore à trouver quelques relations nouvelles qui se rattachent au développement de

$$\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}$$

en fraction continue.

---

[*] Voir *Bulletin de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. III, 1860.

Je me propose de démontrer, dans ce Mémoire, la méthode d'intégration de M. Tchebichef.

1. Considérons, avec Jacobi [*], deux variables x et z liées par l'équation

$$(1)\quad (ax^2+2bx+c)z^2+2(a'x^2+2b'x+c')z+(a''x^2+2b''x+c'')=0,$$

ou, ce qui revient au même, par l'équation

$$(2)\quad (az^2+2a'z+a'')x^2+2(bz^2+2b'z+b'')x+(cz^2+2c'z+c'')=0.$$

En posant

$$(a'x^2+2b'x+c')^2-(a''x^2+2b''x+c'')(ax^2+2bx+c)=\mathrm{R}x,$$
$$(bz^2+2b'z+b'')^2-(az^2+2a'z+a'')(cz^2+2c'z+c'')=\mathrm{R}_1z,$$

on obtient, en vertu des équations précédentes,

$$(3)\qquad z=\frac{-(a'x^2+2b'x+c')\pm\sqrt{\mathrm{R}x}}{ax^2+2bx+c},$$

$$(4)\qquad x=\frac{-(bz^2+2b'z+b'')\pm\sqrt{\mathrm{R}_1z}}{az^2+2a'z+a''}.$$

L'équation (1) différentiée nous donne

$$[(ax^2+2bx+c)z+(a'x^2+2b'x+c')]\,dz$$
$$+[(az^2+2a'z+a'')x+(bz^2+2b'z+b'')]\,dx=0.$$

Or des expressions de z et de x on déduit

$$(ax^2+2bx+c)z+(a'x^2+2b'x+c')=\pm\sqrt{\mathrm{R}x},$$
$$(az^2+2a'z+a'')x+(bz^2+2b'z+b'')=\mp\sqrt{\mathrm{R}_1z},$$

et par suite

$$\frac{dz}{\sqrt{\mathrm{R}_1z}}=\mp\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}x}}.$$

[*] Jacobi, *Mathematische Werke*. Band. 3, p. 83.

Au moyen de l'équation (1), on peut transformer la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}$$

en celle de la forme

$$\frac{dz}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}},$$

c'est-à-dire telle que le polynôme placé sous le radical contienne le facteur z. Déterminons à cet effet les constantes a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', de sorte que $\mathrm{R}x$ soit égal à $x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, et que $\mathrm{R}_1 z$ ait la forme $z^4 + lz^3 + mz^2 + nz$.

On a alors les équations suivantes :

$$a'^2 - aa'' = 1, \quad 4a'b' - 2ab'' - 2a''b = \alpha,$$
$$4b'^2 + 2a'c' - ac'' - a''c - 4bb'' = \beta,$$
$$4b'c' - 2bc'' - 2b''c = \gamma, \quad c'^2 - cc'' = \delta,$$
$$b^2 - ac = 1, \quad b''^2 - a''c'' = 0.$$

Comme il n'y a ci-dessus que sept équations servant à déterminer les neuf inconnues $a, b, c, \ldots$, nous en pouvons choisir deux à volonté. La transformation employée par M. Tchebichef s'obtient en posant

$$a = 0, \quad a'' = 0.$$

Des équations précédentes, il vient

$$b'' = 0, \quad a' = \pm 1, \quad b = \pm 1.$$

Prenons $a' = 1$, $b = -1$.

Des mêmes équations on déduit

$$b' = \frac{\alpha}{4}, \quad c' = \frac{1}{2}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right), \quad c'' = \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha}{4}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right),$$

$$c = \frac{\frac{1}{4}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)^2 - \delta}{\frac{\alpha}{4}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right) - \frac{\gamma}{2}}.$$

Égalant les coefficients des mêmes puissances de la variable dans les expressions $R_1 z$ et $z^4 + lz^3 + mz^2 + nz$, on obtient

$$l = -\gamma - \frac{(4\beta - \alpha^2)^2 - 64\delta}{\alpha^3 - 8\alpha\beta + 16\gamma},$$

$$m = -2\beta + \frac{3}{4}\alpha^2,$$

$$n = \gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta + \frac{1}{8}\alpha^3.$$

Quant aux signes devant les radicaux dans les formules (3) et (4), nous choisirons dans la première le signe négatif, et dans la seconde le signe positif.

D'après cela

$$z = \frac{x^2 + \frac{\alpha}{2}x + \frac{4\beta - \alpha^2}{8} - \sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}{2x + \dfrac{\frac{\alpha}{4}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right) - \delta}{\frac{\alpha}{4}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right) - \frac{\gamma}{2}}},$$

$$x = \frac{z^2 - \frac{\alpha}{2}z + \sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}}{2z}.$$

Les équations précédentes nous conduisent à celles-ci :

$$\frac{dx}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}} = \frac{dz}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}},$$

$$\int \frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}} = \frac{1}{2}\int \frac{\left(z - \frac{\alpha}{2} + 2A\right)dz}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}} + \frac{1}{2}\log z.$$

C'est la transformation dont se sert M. Tchebichef dans son Mémoire.

2. Maintenant nous allons établir les conditions qui doivent être satisfaites pour que l'intégrale de la différentielle

$$\frac{(z + A)\,dz}{\sqrt{Rz}}$$

puisse s'exprimer en logarithmes

Si cette intégrale s'exprime sous forme finie, elle s'obtient, comme on sait, d'après la formule

$$\lambda \int \frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{Rz}} = \log(P' + Q'\sqrt{Rz}) + \text{const.},$$

où P′ et Q′ désignent les fonctions entières dont les degrés sont respectivement λ et $\lambda - 2$, et qui satisfont à l'équation

$$(5) \qquad P'^2 - Q'^2\, Rz = 1.$$

Dans le cas où $z = 0$, on a $Rz = 0$, $P'^2 = 1$. On peut supposer d'ailleurs $P' = 1$; car, si l'on avait $P' = -1$, l'équation (5) subsisterait encore pour les valeurs $-P'$ et $-Q'$.

Cela posé, nous pouvons écrire l'intégrale précédente comme il suit :

$$\lambda \int_0^z \frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{Rz}} = \log(P' + Q'\sqrt{Rz}).$$

Soient g, g', g'' les trois racines de l'équation

$$z^3 + lz^2 + mz + n = 0.$$

On peut supposer que, parmi les valeurs zéro, g, g', g'', il n'y en ait pas deux égales entre elles, car, dans le cas contraire, l'intégrale

$$\int \frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{Rz}}$$

s'exprimerait sous forme finie, quel que soit le paramètre A; mais ce cas, nous le laissons de côté.

En remarquant que Rz s'annule pour $z = g, g', g''$, on conclut de l'équation (5) que P est égal à ± 1 pour ces valeurs de z. On aura, par suite,

$$\lambda \int_0^g \frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{Rz}} = \mu\pi i, \quad \lambda \int_g^{g'} \frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{Rz}} = \mu'\pi i,$$

où μ et μ' représentent des nombres entiers qui dépendent évidemment des chemins d'intégration; mais, dans le but que nous nous pro-

posons, il faut exprimer, sous une autre forme, les conditions d'intégrabilité en logarithmes.

Réduisons pour cet effet l'intégrale

$$\int_0^z \frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{Rz}}$$

à sa forme canonique.

En posant

$$z = \frac{g\sin^2 am\,u}{\sin^2 am\,u - \sin^2 am\,a},$$

$$k^2 = \frac{g''}{g'}\,\frac{g'-g}{g''-g}, \quad \sin^2 am\,a = \frac{g''-g}{g''},$$

et par conséquent

$$g'' = \frac{g}{\cos^2 am\,a}, \quad g' = \frac{g}{\Delta^2 \sin am\,a},$$

on a

$$\sqrt{Rz} = \frac{g(g''-g)}{g''}\sqrt{g'(g''-g)}\,\frac{\sin am\,u\cos am\,u\,\Delta am\,u\,du}{(\sin^2 am\,u - \sin^2 am\,a)^2},$$

$$\frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{Rz}} = M\,du - 2\,\frac{\sin am\,a\cos am\,a\,\Delta am\,a\,du}{\sin^2 am\,u - \sin^2 am\,a},$$

où

$$M = -2(A+g)\frac{g''}{g'(g''-g)}\sin^2 am\,a.$$

Donc

$$(6)\quad \lambda\int_0^z \frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{Rz}} = \log(P'+Q'\sqrt{Rz}) = \lambda\left(M - 2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\right)u + \lambda\log\frac{H(a+u)}{H(a-u)},$$

où Θ et H sont les fonctions jacobiennes. Pour déterminer les constantes a et A, remarquons que z reprend la même valeur toutes les fois qu'on augmente ou diminue u de $2K$ ou $2K'i$ et, par conséquent, de $2mK + 2m'K'i$, m et m' désignant des nombres entiers. Dans ce cas, l'accroissement du second terme de l'équation (6) doit être égal à $2s\pi i$, où s est un nombre entier. Par conséquent

$$(7)\quad \begin{cases} \lambda\left(M - 2\dfrac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\right)(2mK + 2m'K'i) \\ \quad + \lambda\log\dfrac{H(a+u+2mK+2m'K'i)}{H(a-u-2mK-2m'K'i)} - \lambda\log\dfrac{H(u+a)}{H(u-a)} = 2s\pi i. \end{cases}$$

D'autre part on a

$$\mathrm{H}(u+2m'\mathrm{K}'i) = (-1)^{m'}\mathrm{H}(u)\,e^{-\frac{m'\pi i}{\mathrm{K}}(u+m'\mathrm{K}'i)},$$

$$\mathrm{H}(u+2m\mathrm{K}) = (-1)^{m}\mathrm{H}(u),$$

et par suite

$$\frac{\mathrm{H}(u+a+2m\mathrm{K}+2m'\mathrm{K}'i)}{\mathrm{H}(a-u-2m\mathrm{K}-2m'\mathrm{K}'i)} = \frac{\mathrm{H}(a+u)}{\mathrm{H}(a-u)}\,e^{-\frac{2\pi i a m'}{\mathrm{K}}}.$$

D'après cela, l'équation (7) peut s'écrire

$$\lambda\left(\mathrm{M}-2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\right)(2m\mathrm{K}+2m'\mathrm{K}'i)-\frac{2\pi i\,am'}{\mathrm{K}} = 2s\pi i.$$

Posant dans cette équation $m=1$, $m'=0$ et désignant par ν' la valeur correspondante de s, on obtient

(8) $$\mathrm{M}-2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} = \frac{\nu'\pi i}{\lambda}.$$

Ensuite, faisant $m=0$, $m'=1$, et désignant par $-\nu$ la valeur correspondante de s, on aura

$$a = \frac{\nu\mathrm{K}+\nu'\mathrm{K}'i}{\lambda}.$$

De l'équation (8), on déduit la valeur de M ou de A.

3. La détermination de l'intégrale $\int\frac{(z+\mathrm{A})\,dz}{\sqrt{\mathrm{R}z}}$, dans le cas où elle s'exprime en termes finis, se réduit, comme on sait, à la détermination des fonctions P et Q satisfaisant à l'équation

(9) $$\mathrm{P}^2-\mathrm{Q}^2\,\mathrm{R}z = a,$$

a désignant une constante. De toutes les solutions de l'équation (9), on peut naturellement préférer celle où P atteint le moindre degré possible. On sait que ces fonctions P et Q peuvent être trouvées au moyen du développement de $\sqrt{\mathrm{R}z}$ en fraction continue, et que leurs coefficients s'expriment rationnellement en ceux de $\mathrm{R}z$. Lorsque ces

derniers sont rationnels, les coefficients de P et Q le seront aussi. Nous supposerons les coefficients l, m, n de Rz entiers.

Quant à l'équation (9), il y a deux cas à distinguer, savoir : 1° lorsque λ, degré de la fonction P, est un nombre impair ; 2° lorsque λ est pair.

Nous allons démontrer actuellement que le second cas ne peut avoir lieu que lorsque Rz se décompose en deux facteurs du second degré à coefficients rationnels satisfaisant à certaines conditions que nous allons signaler ci-dessous.

Remarquant que, d'après l'équation (9), P^2 acquiert la valeur a, lorsque z s'annule, et désignant cette valeur par b^2, on peut mettre l'équation sous la forme qui suit

$$P^2 - b^2 = Q^2 Rz,$$

d'où il vient

$$P - b = Q_1^2 (z^2 + pz),$$

$$P + b = Q_2^2 (z^2 + rz + s),$$

où

$$Q_1 Q_2 = Q, \quad Rz = (z^2 + pz)(z^2 + rz + s).$$

En effet les fonctions P $-$ b et P $+$ b n'ont pas de facteurs communs, car, autrement, chacun de ces facteurs diviserait leur différence, ce qui est évidemment impossible. Il s'ensuit que Q doit être égal au produit de Q_1 et Q_2, Q_1 étant lui-même le produit des facteurs de Q appartenant à P $-$ b, et Q_2 celui des facteurs qui sont communs à Q et à P $+$ b. Quant au polynôme Rz, on ne peut faire à son égard que deux suppositions. En effet, P $-$ b et P $+$ b étant des fonctions de degrés pairs, Rz doit figurer comme facteur dans l'une de ces fonctions (savoir, dans P $-$ b, si $z = 0$, P $= b$, ce qui peut toujours être supposé) ou être égal au produit de deux facteurs $z^2 + pz$ et $z^2 + rz + s$, dont le premier appartient à P $-$ b et le second à P $+$ b. La première supposition doit être rejetée, puisqu'elle nous conduirait aux équations

$$P - b = Q_1^2 Rz,$$

$$P + b = Q_2^2,$$

ou bien à l'équation

$$Q_2^2 - Q_1^2 Rz = 2b;$$

ce qui nous fait voir que, de toutes les fonctions satisfaisant à l'équation (9), P et Q ne sont pas du moindre degré possible.

D'après cela, nous ne nous occuperons que des équations

$$(10)\qquad \begin{cases} P - b = \pm Q_1^2 (z^2 + pz), \\ P + b = \pm Q_2^2 (z^2 + rz + s). \end{cases}$$

Il est aisé de voir que les nombres p, r, s sont rationnels. Quant à p, cela résulte immédiatement de ce que l'équation $\frac{P - b}{z} = 0$ à coefficients rationnels a la racine $z = -p$, dont le degré de multiplicité est impair, tandis que ses autres racines ont des nombres pairs pour leurs degrés de multiplicité. En outre, p étant une racine rationnelle de l'équation

$$z^3 + lz^2 + mz + n = 0$$

à coefficients entiers, on en conclut qu'il est entier. Il en est de même pour r et s, comme le montre l'égalité

$$z^3 + lz^2 + mz + n = (z + p)(z^2 + rz + s).$$

Il résulte de ce qui précède que les coefficients Q_1 et Q_2 sont rationnels.

Des équations (10), il vient

$$(11)\qquad Q_2^2 (z^2 + rz + s) - Q_1^2 (z^2 + pz) = \pm 2b.$$

En attribuant successivement à z les valeurs zéro et $-p$, et en désignant par A_1 et A_2 les valeurs correspondantes de Q_2, il s'ensuit que

$$(12)\qquad \begin{cases} A_1^2 s = \pm 2b, \\ A_2^2 (p^2 - pr + s) = \pm 2b; \end{cases}$$

par conséquent

$$s(p^2 - pr + s) = \frac{4b^2}{A_1^2 A_2^2} = \text{nombre carré};$$

c'est la première relation entre les coefficients p, r, s.

Les racines de l'équation

$$z^2 - rz + s = 0$$

peuvent être imaginaires ou réelles. Dans le premier cas, on a l'inégalité $4s - r^2 > 0$; dans le second cas, désignons ces racines par z_1 et z_2, et par B_1 et B_2 les valeurs correspondantes de Q_1. Faisant dans (11) successivement $z = z_1$ et $z = z_2$, on trouve

$$-B_1^2(z_1^2 - pz_1) = \pm 2b,$$
$$-B_2^2(z_2^2 - pz_2) = \pm 2b,$$

si $s > 0$, $\pm 2b > 0$, en vertu des équations (12); par conséquent

$$z_1^2 - pz_1 < 0,$$
$$z_2^2 - pz_2 < 0.$$

En additionnant ces inégalités, on aura

$$z_1^2 + z_2^2 - p(z_1 + z_2) < 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$r^2 - pr - 2s < 0;$$

mais $r^2 > 4s$; donc $pr - 2s > 0$.

Si, au contraire, $s < 0$, on a, d'après (12),

$$p^2 - pr + s < 0,$$

d'où $pr - s > 0$, et par suite $pr - 2s > 0$, en vertu de $s < 0$.

D'après cela, l'inégalité $pr - 2s > 0$ doit avoir lieu, si $r^2 - 4s > 0$. Ainsi, pour que l'équation (11) ait lieu, il est nécessaire qu'il existe au moins l'une des inégalités

$$4s - r^2 > 0, \quad pr - 2s > 0.$$

4. En s'appuyant sur des résultats obtenus, nous allons démontrer

que l'intégrale $\lambda\int_0^z\frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{Rz}}$, lorsqu'elle s'exprime par $\log(P+Q\sqrt{Rz})$, où P désigne une fonction de degré pair λ, peut être réduite à une autre qui s'exprime par $\log(P'+Q'\sqrt{Rz})$, P' étant une fonction de degré impair.

Remarquons pour cela que, si nous parvenons à transformer, au moyen d'une substitution rationnelle, l'intégrale $\int^z\frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{Rz}}$, qui s'exprime en termes finis, en une autre $\int^{z'}\frac{(z'+A')\,dz'}{\sqrt{z'^4+l'z'^3+m'z'^2+n'z'}}$ où l', m', n' sont rationnels, et dans laquelle la fonction $z'^4+l'z'^3+m'z'^2+n'z'$ se décompose maintenant en facteurs du second degré $z'^2+p'z'$ et $z'^2+r'z'+s'$ à coefficients rationnels, de manière que $s'(p'^2-p'r'+s')$ devienne un nombre carré, et, en outre, qu'une des inégalités

$$4s'-r'^2>0,\quad p'r'-2s'>0$$

au moins soit satisfaite, nous aurons

$$\lambda'\int^{z'}\frac{(z'+A')\,dz'}{\sqrt{Rz}}=\log(P'+Q'\sqrt{Rz}),$$

où P' est une fonction de degré impair λ'.

Pour transformer l'intégrale de cette manière, M. Tchebichef emploie la substitution

(13) $$z_1=\frac{(p-r)^2(z^2+pz)}{(r-p)z+s},$$

et remarque que, au moyen de pareilles substitutions, on peut arriver à l'ntégrale de la forme désirée, ou à une telle dont l'expression en logarithmes est connue *a priori*.

D'après l'expression de z, on a

$$z^2+pz=z_1\frac{(r-p)z+s}{(p-r)^2},$$

$$z^2+rz+s=\frac{[z_1+(p-r)^2][(r-p)z+s]}{(p-r)^2};$$

22..

par conséquent

$$(14)\qquad \sqrt{(z^2+pz)(z^2+rz+s)} = \frac{[(r-p)z+s]\sqrt{z_1[z_1+(p-r)^2]}}{(p-r)^2}.$$

En outre, de la même équation (13) il vient

$$(p-r)z = -\frac{p(p-r)+z_1}{2} - \sqrt{\left[\frac{p(p-r)+z_1}{2}\right]^2 + sz_1}.$$

Nous avons préféré le signe négatif devant le radical pour avoir une valeur infinie de z pour $z_1 = \infty$.

En différentiant (13), on trouve

$$\frac{(r-p)\,dz}{(r-p)z+s} = \frac{dz_1}{\sqrt{[p(p-r)+z_1]^2+4sz_1}},$$

$$(15)\qquad \frac{(r-p)^2(z+A)\,dz}{(r-p)z+s} = \frac{1}{2}\,\frac{p(p-r)+z_1+2A(r-p)}{\sqrt{[p(p-r)+z_1]^2+4sz_1}}\,dz_1 + \tfrac{1}{2}\,dz_1.$$

D'après les équations (14) et (15), on aura

$$\int \frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{(z^2+pz)(z^2+rz+s)}} = \frac{1}{2}\int \frac{[p(p-r)+z_1+2A(r-p)]\,dz_1}{\sqrt{z_1[z_1+(p-r)^2]\{[p(p-r)+z_1]^2+4sz_1\}}}$$
$$+ \log\left[\sqrt{z_1}+\sqrt{z_1+(p-r)^2}\right].$$

Les racines de l'équation

$$[z_1+p(p-r)]^2+4sz_1 = 0$$

sont

$$p(r-p)-2s \pm \sqrt{4s(p^2-pr+s)};$$

elles sont rationnelles à cause de $s(p^2-pr+s) =$ nombre carré. Ainsi toutes les racines du nouveau polynôme du quatrième degré, placé sous le radical, seront des nombres rationnels. Nous allons chercher d'abord combien de fois ce polynôme se décompose en facteurs

$$(z_1^2+p_1z_1)(z_1^2+r_1z_1+s_1),$$

satisfaisant aux conditions dont nous avons parlé plus haut. Essayons d'abord de poser

$$p_1 = (p - r)^2,$$

donc

$$r_1 = 2[p(p - r) + 2s],$$
$$s_1 = p^2(p - r)^2;$$

il en résulte

$$s_1(p_1^2 - p_1 r_1 + s_1) = p^2(p - r)^4(r^2 - 4s),$$
$$r_1^2 - 4s_1 = 16s(s - pr + p^2) > 0,$$
$$p_1 r_1 - 2s_1 = 2(p - r)^2(2s - pr).$$

Pour que $s_1(p_1^2 - p_1 r_1 + s)$ soit un nombre carré, il est nécessaire que $r^2 - 4s$ ne soit pas négatif; mais, dans ce cas, d'après ce qui a été dit plus haut, $pr - 2s$ doit être positif, et, cette dernière condition étant satisfaite, les nombres p_1, r_1, s_1 ne satisfont à aucune des inégalités $4s_1 - r_1^2 > 0$, $p_1 r_1 - 2s_1 > 0$.

Ainsi il suffit de poser

$$p_1 = p(p - r) + 2s \pm 2\sqrt{s(p^2 - pr + s)},$$
$$s_1 = (p - r)^2\left[p(p - r) + 2s \pm 2\sqrt{s(p^2 - pr + s)}\right],$$
$$r_1 = (p - r)^2 + (p - r)p + 2s \pm 2\sqrt{s(p^2 - pr + s)},$$

d'où il vient

$$s_1(p_1^2 - p_1 r_1 + s_1)$$
$$= \pm 4(p - r)^2\sqrt{s(p^2 - pr + s)}\left[rp - 2s \pm 2\sqrt{s(p^2 - pr + s)}\right],$$
$$r_1^2 - 4s_1 = \left[r^2 - rp + 2s \pm 2\sqrt{s(p^2 - pr + s)}\right]^2,$$
$$r_1 p_1 - 2s_1 = (p - r)^2\left[rp - 2s \pm 6\sqrt{s(p^2 - pr + s)}\right].$$

Il est aisé de voir qu'il faut, dans les formules ci-dessus, affecter du signe positif le radical $\sqrt{s(p^2 - pr + s)}$; en effet, comme l'inégalité $4s_1 - r_1^2 > 0$ n'est évidemment pas satisfaite, posons $r_1 p_1 - 2s_1 > 0$. D'après cela, le signe négatif devant $\sqrt{s(p^2 - pr + s)}$ ne peut être re-

tenu que lorsque $rp - 2s$ est positif et supérieur à $6\sqrt{s(p^2 - pr + s)}$; mais alors $s_1(p_1^2 - p_1 r_1 + s_1)$ deviendrait négatif et, par conséquent, ne pourrait pas être un carré. Posons donc

$$\begin{aligned}
p_1 &= p(p-r) + 2s - 2\sqrt{s(p^2 - pr + s)},\\
r_1 &= p(p-r) + 2s + (p-r)^2 - 2\sqrt{s(p^2 - pr + s)},\\
s_1 &= (p-r)^2\left[p(p-r) - 2s - 2\sqrt{s(p^2 - pr + s)}\right].
\end{aligned}$$

Si $s_1(p_1^2 - p_1 r_1 + s_1)$ est encore un nombre carré, nous ferons de nouveau la transformation en passant aux nombres p_2, r_2, s_2, qui s'expriment en p_1, r_1, s_1 de la même manière que p_1, r_1, s_1 s'expriment en p, r, s, et ainsi de suite. Si, en opérant comme il a été dit plus haut, nous rencontrions des nombres égaux $p_i = r_i$, nous trouverions l'intégrale correspondant au système p_i, r_i, s_i d'après la formule

$$\int \frac{(z_i + \frac{1}{2}p_i)\,dz_i}{\sqrt{(z_i^2 + p_i z_i)(z_i^2 + p_i z_i + s_i)}} = \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{z_i^2 + p_i z_i} + \sqrt{z_i^2 + p_i z_i + s_i}}{\sqrt{z_i^2 + p_i z_i} - \sqrt{z_i^2 + p_i z_i + s_i}}.$$

5. Il nous reste maintenant à prouver que, lorsque nous ne rencontrerons pas de nombres p_i et r_i qui soient égaux entre eux, nous arriverons, après un nombre fini d'opérations, aux nombres p_ν, r_ν, s_ν, de sorte que $s_\nu(p_\nu^2 - r_\nu p_\nu + s_\nu)$ ne sera pas un carré.

D'après ce qui précède, il existe entre les nombres p_μ, r_μ, s_μ et $p_{\mu-1}$, $r_{\mu-1}$, $s_{\mu-1}$ les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&s_\mu(p_\mu^2 - p_\mu r_\mu + s_\mu)\\
&\quad = 4(p_{\mu-1} - r_{\mu-1})^4\Big[r_{\mu-1}p_{\mu-1} - 2s_{\mu-1} + 2\sqrt{s_{\mu-1}(p_{\mu-1}^2 - p_{\mu-1}r_{\mu-1} + s_{\mu-1})}\\
&\qquad\qquad \sqrt{s_{\mu-1}(p_{\mu-1}^2 - p_{\mu-1}r_{\mu-1} + s_{\mu-1})}\Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_\mu p_\mu - 2s_\mu = (p_{\mu-1} - r_{\mu-1})^2\Big[&r_{\mu-1}p_{\mu-1} - 2s_{\mu-1}\\
&- 6\sqrt{s_{\mu-1}(p_{\mu-1}^2 - p_{\mu-1}r_{\mu-1} + s_{\mu-1})}\Big].
\end{aligned}$$

Soient

$$A_\mu^2 = \frac{s_\mu(p_\mu^2 - p_\mu r_\mu + s_\mu)}{[(p_{\mu-1} - r_{\mu-1})(p_{\mu-2} - r_{\mu-2})\ldots(p - r)]^4},$$

$$B_\mu = \frac{r_\mu p_\mu - 2s_\mu}{[(p_{\mu-1} - r_{\mu-1})(p_{\mu-2} - r_{\mu-2})\ldots(p - r)]^2};$$

donc

$$A_\mu^2 = 4(B_{\mu-1} + 2A_{\mu-1})A_{\mu-1},$$
$$B_\mu = B_{\mu-1} + 6A_{\mu-1}.$$

Comme $A_0 = \sqrt{s(p^2 - pr + s)}$ et $B_0 = rp - 2s$ sont des entiers, A_μ et B_μ le seront aussi pour toutes les valeurs de μ, pourvu que

$$s_\mu(p_\mu^2 - p_\mu r_\mu + s_\mu)$$

soit un carré.

Démontrons à présent que tout diviseur commun impair de A_μ et de B_μ sera aussi un commun diviseur de $A_{\mu-1}$ et de $B_{\mu-1}$.

En effet, soit k_μ le plus grand diviseur impair commun à A_μ et P_μ, et $k_{\mu-1}$ le plus grand commun diviseur impair de $A_{\mu-1}$ et de $B_{\mu-1}$. En posant

$$A_\mu = k_\mu a_\mu, \qquad B_\mu = k_\mu b_\mu,$$
$$A_{\mu-1} = k_{\mu-1} a_{\mu-1}, \quad B_{\mu-1} = k_{\mu-1} b_{\mu-1},$$

on a

$$(16) \quad \begin{cases} k_\mu^2 a_\mu^2 = 4k_{\mu-1}^2(b_{\mu-1} + 2a_{\mu-1})a_{\mu-1}, \\ k_\mu b_\mu = k_{\mu-1}(b_{\mu-1} + 6a_{\mu-1}). \end{cases}$$

Il s'ensuit que k_μ sera divisible par $k_{\mu-1}$, parce que, dans le cas contraire, a_μ et b_μ auraient eu quelque diviseur commun impair, et, par conséquent, k_μ n'aurait pas été le plus grand commun diviseur impair des nombres A_μ et B_μ. Soit $k_\mu = \lambda k_{\mu-1}$, λ étant un entier impair.

Des équations (16) on a

$$\lambda^2 a_\mu = 4\lambda a_{\mu-1} b_\mu - 16 a_{\mu-1}^2;$$
$$\lambda b_\mu = b_{\mu-1} + 6a_{\mu-1}.$$

On conclut de la première équation que $a_{\mu-1}$ et λ ont un diviseur commun, et, de la seconde, que ce diviseur appartient aussi à $b_{\mu-1}$, ce qui ne peut avoir lieu, car $k_{\mu-1}$ est le plus grand commun diviseur impair de $A_{\mu-1}$ et de $B_{\mu-1}$. Il en résulte que le plus grand commun diviseur impair de A_μ et de B_μ sera en même temps le plus grand commun diviseur impair de A_0 et de B_0. Réciproquement, soit k le plus grand di-

viseur commun à ces derniers nombres (qui peut aussi être pair). En effectuant le calcul des nombres A_1, B_1, A_2, B_2, ..., on trouvera que k sera le diviseur commun de A_0 et de B_0. Soient

$$A_0 = kA'_0, \quad B_0 = kB'_0,$$

alors

$$A'_n = 4A'_{n-1}(B'_{n-1} + 2A'_{n-1}),$$
$$B'_n = B'_{n-1} + 6A'_{n-1}.$$

D'après ce qui précède, il est clair que B'_n et A'_n sont sans diviseur commun impair. Considérons à présent la fraction $\frac{B_0 + 2A_0}{A_0}$ après qu'elle sera réduite à ses moindres termes, c'est-à-dire après la division de ses termes par k, le plus grand commun diviseur de A_0 et de B_0 ou de A_0 et de $B_0 + 2A_0$, ce qui est la même chose. Suivant la notation adoptée, cette fraction deviendra $\frac{B'_0 + 2A'_0}{A'_0}$. Remarquons que les termes de cette fraction sont positifs. Quant au dénominateur, cela se voit immédiatement, et le numérateur ne peut être négatif que lorsque $B_0 = rp - 2s < 0$. En outre, en remarquant que dans ce cas le nombre

$$B_0^2 - 4A_0^2 = (rp - 2s)^2 - 4s(p^2 - pr + s) = p^2(r^2 - 4s)$$

doit être négatif, en vertu de $4s - r^2 > 0$, on voit que B_0 est inférieur à $2A_0$; donc le numérateur $B_0 + 2A_0$ est positif. Considérons à présent le cas où la fraction $\frac{B'_0 + 2A'_0}{A'_0}$ se réduit à l'unité. Alors on a $B_0 = -A_0$. En effectuant le calcul, on trouve

$$A_1 = 2A_0, \quad B_1 = 5A_0, \quad A_2^2 = 8.9.A_0^2;$$

A_2 n'est pas déjà un nombre rationnel. Nous nous occuperons ensuite du cas où au moins un des termes de la fraction $\frac{B'_0 + 2A'_0}{A'_0}$ a des diviseurs impairs. Soit q^f celui des diviseurs dont le degré de multiplicité f est le moindre, q étant un nombre premier. Des expressions

$$A'_1 = 4A'_0(B'_0 + 2A'_0),$$
$$B'_1 = B'_0 + 6A''_0 = B'_0 + 2A'_0 + 4A'_0,$$

il suit que $A_1'^2$ est divisible par q, et B_1' ne l'est pas. En outre, pour que A_1' devienne un nombre entier, f doit être pair et, par conséquent, A_1' admet le diviseur $q^{\frac{f}{2}}$. Des expressions

$$A_2'^2 = 4A_1'(B_1' + 2A_1'),$$
$$B_2' = B_1' + 6A_1',$$

on voit encore que $A_2'^2$ est divisible par q, et B_2' ne l'est pas. Pour que A_2' soit un nombre rationnel et entier, $\frac{f}{2}$ doit être pair; donc A_2' admet $\frac{f}{4}$ fois le diviseur q. On prouvera de la même manière que B_3' ne sera pas divisible par q, et que A_3' admettra le diviseur q au degré $\frac{f}{8}$, lorsqu'il sera un nombre rationnel et entier. Suivant la même marche, on voit que le nombre A_μ', contenant q au degré impair, ne sera pas un carré, et par conséquent $A_{\mu+1}'$ ne sera pas un nombre rationnel : il est évident que μ est inférieur à f.

Considérons enfin le cas où l'un des termes de la fraction $\frac{B_0' + 2A_0'}{A_0'}$ est égal à 2^f, où f est l'exposant quelconque et l'autre l'unité.

Soient d'abord

$$B_0' + 2A_0' = 1, \quad A_0' = 2^f.$$

En évaluant A_1', B_1',..., on aura

$$A_1' = 2^{\frac{f+2}{2}}, \quad B_1' = 1 + 2^{\frac{f+2}{2}},$$

où f doit être pair. Le numérateur de la fraction irréductible

$$\frac{2A_1' + B_1'}{A_1'} = \frac{\left(1 + 2^{\frac{f+2}{2}}\right)}{2^{\frac{f+2}{2}}}$$

ne renferme que des facteurs impairs dont les degrés ne sont pas supérieurs à f. En effet, cela résulte de ce que, pour $f = 2$, le numérateur devient 5^2 et, pour $f > 2$, $1 + 2^{\frac{f+2}{2}} < 3^f$.

Il résulte de là qu'il suffit de répéter les mêmes opérations moins de f fois pour arriver au nombre A_μ^2 qui ne sera pas un carré. Soient maintenant $B'_0 = 2A'_0 = 2^f$, $A_0 = 1$. Remarquons que f ne peut pas être égal à 2, car alors B'_0 serait aussi égal à 2, et par suite $B_0 = 2A_0$, c'est-à-dire $B_0^2 - 4A_0^2 = p^2(r^2 - 4s) = 0$; donc il faut admettre $p = 0$ ou $r^2 - 4s = 0$. Dans les deux suppositions, l'équation

$$z(z + p)(z^2 + rz + s) = 0$$

a des racines égales; mais nous avons fait abstraction de ce cas, comme cela a été dit plus haut. Après avoir démontré que f ne peut pas être égal à 2, passons au calcul des nombres $A'_1, B'_1, \ldots$ Nous avons

$$A'_1 = 2 \cdot 2^{\frac{f}{2}}, \text{ où } f \text{ doit être pair,}$$

$$B'_1 = 2^{\frac{f}{2}}(1 + 2^{f-2}).$$

Le numérateur de la fraction

$$\frac{2A'_1 + B'_1}{A'_1} = \frac{\left(1 + 2^{\frac{f-2}{2}}\right)^2}{2^{\frac{f}{2}}}$$

ne contiendra que des facteurs impairs, dont les exposants ne surpassent pas $f - 2$. Il suffit donc d'opérer ces calculs un nombre de fois inférieur à $f - 2$ pour arriver au nombre A_μ^2, qui ne sera pas un carré.

6. D'après ce qui a été dit ci-dessus, on voit qu'en transformant, au moyen de la formule

$$z_1 = \frac{(p - r)(z^2 + pz)}{(r - p)z + s},$$

l'intégrale

$$\int \frac{(z + A)\,dz}{\sqrt{(z^2 + pz)(z^2 + rz + s)}},$$

on obtient une intégrale de la même forme, et, en outre, il a été montré qu'après un nombre fini d'opérations on rencontre l'intégrale

dans laquelle $p_i = r_i$, ou celle dans laquelle la fonction placée sous le radical ne se décompose pas en deux facteurs $(z^2 + pz)(z^2 + rz + s)$, dont les coefficients satisfont à cette condition-ci :

$$s(p^2 - pr + s) = \text{un nombre carré},$$

et au moins à l'une des inégalités

$$4s - r^2 > 0, \quad rp - 2s > 0.$$

Il résulte de là qu'on peut toujours se borner aux intégrales dans lesquelles la fonction placée sous le radical ne se décompose pas en facteurs satisfaisant aux conditions précédentes; afin d'évaluer de pareilles intégrales, M. Tchebichef se sert de nouveau de transformations successives.

D'après sa méthode, passons de l'intégrale

$$\int \frac{(z + A)\,dz}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}}$$

à celle-ci

$$\int \frac{(z_1 + A')\,dz_1}{\sqrt{z_1^4 + l_1 z_1^3 + m_1 z_1^2 + n_1 z_1}},$$

en ayant égard à la transformation du n° 1, c'est-à-dire en posant

$$z_1 = \frac{\frac{1}{16} l^3 - \frac{1}{4} lm + \frac{1}{2} n}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz} - z^2 - \frac{1}{2} lz - \frac{4m - l^2}{8}},$$

$$l_1 = -l - \frac{(l^2 - 4m)^2}{2l^3 - 8lm + 16n},$$

$$m_1 = -2m + \frac{3}{4} l^2,$$

$$n_1 = -n + \frac{1}{2} lm - \frac{1}{8} l^3.$$

De ces nombres l_1, m_1, n_1 nous passerons aux nombres $l_2, m_2, n_2, \ldots$

en posant généralement

$$(17)\quad \begin{cases} l_{i+1} = -l_i - \dfrac{(l_i^2 - 4m_i)^2}{2l_i^3 - 8l_i m_i + 16 n_i}, \\ m_{i+1} = -2m_i + \frac{3}{4} l_i^2, \\ n_{i+1} = -n_i + \frac{1}{2} l_i m_i - \frac{1}{8} l_i^3, \end{cases}$$

et en prenant $l_0 = l$, $m_0 = m$, $n_0 = n$.

Maintenant allons chercher où nous conduisent ces transformations successives, lorsque l'intégrale $\int \frac{(z + A)\,dz}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}}$ s'exprime en termes finis, et, pour cet effet, considérons les relations entre les racines des équations

$$z^3 + lz^2 + mz + n = 0, \quad z_1^3 + l_1 z_1^2 + m_1 z_1 + n_1 = 0, \ldots$$

Soient g_i, g'_i, g''_i, les racines de l'équation

$$z_i^3 + l_i z_i^2 + m_i + n_i = 0;$$

g_0, g'_0, g''_0 étant désignés plus haut par g, g', g''. Il est aisé de faire voir que g_{i+1}, g'_{i+1}, g''_{i+1} sont liés à g_i, g'_i, g''_i de la manière suivante :

$$(19)\quad \begin{cases} g_{i+1} = \dfrac{(g_i + g'_i - g''_i)(g_i + g''_i - g'_i)}{2(g'_i + g''_i - g_i)}, \\ g'_{i+1} = \dfrac{(g'_i + g_i - g''_i)(g'_i + g''_i - g_i)}{2(g_i + g''_i - g'_i)}, \\ g''_{i+1} = \dfrac{(g'_i + g''_i - g_i)(g_i + g''_i - g'_i)}{2(g'_i + g_i - g''_i)}. \end{cases}$$

En effet, multipliant ces expressions, il vient

$$g_{i+1} g'_{i+1} g''_{i+1} = -n_{i+1} = \tfrac{1}{8}(g_i + g'_i - g''_i)(g_i + g''_i - g'_i)(g'_i + g''_i - g_i);$$

mais

$$g_i + g'_i + g''_i = -l_i;$$

donc

$$-n_{i+1} = \left(-\frac{l_i}{2} - g_i\right)\left(-\frac{l_i}{2} - g'_i\right)\left(-\frac{l_i}{2} - g''_i\right)$$
$$= n_i - \tfrac{1}{2} l_i m_i + \tfrac{1}{8} l_i^3.$$

C'est la troisième formule (17).

Ensuite

$$m_{i+1} = g_{i+1} g'_{i+1} + g_{i+1} g''_{i+1} + g'_{i+1} g''_{i+1}$$
$$= \tfrac{1}{4}(g_i + g'_i - g''_i)^2 + \tfrac{1}{4}(g_i + g''_i - g'_i)^2 + \tfrac{1}{4}(g'_i + g''_i - g_i)^2,$$
$$= -2m_i + \tfrac{3}{4} l_i^2;$$

c'est la deuxième formule (17).

En additionnant enfin les expressions (18), il vient

$$-l_{i+1} = \frac{(g_i + g'_i - g''_i)^2 (g_i + g''_i - g'_i)^2 + (g''_i + g_i - g'_i)^2 (g'_i + g''_i - g_i)^2 + (g'_i + g''_i - g_i)^2 (g_i + g'_i - g''_i)^2}{2(g_i + g''_i - g'_i)(g'_i + g''_i - g_i)(g_i + g'_i - g''_i)};$$

par conséquent

$$l_{i+1} n_{i+1} = \left(-\frac{l_i}{2} - g''_i\right)^2 \left(-\frac{l_i}{2} - g'_i\right)^2 + \left(-\frac{l_i}{2} - g'_i\right)^2 \left(-\frac{l_i}{2} - g_i\right)^2$$
$$+ \left(-\frac{l_i}{2} - g_i\right)^2 \left(-\frac{l_i}{2} - g''_i\right)^2.$$

Le second nombre de l'équation précédente est une fonction symétrique et entière des racines g_i, g'_i, g''_i. Après l'avoir exprimé en coefficients l_i, m_i, n_i, on a

$$l_{i+1} n_{i+1} = (m_i - \tfrac{1}{4} l_i^2)^2 + l_i(n_i - \tfrac{1}{2} m_i l_i + \tfrac{1}{8} l_i^3),$$

donc

$$l_{i+1} = -l_i - \frac{(l_i^2 - 4m_i)^2}{2l_i^3 - 8m_i l_i + 16 n_i};$$

c'est la première formule (17).

7. A présent, nous allons faire connaître les expressions de g_i, g'_i, g''_i en fonctions elliptiques. Après avoir posé

$$\varkappa^2 = \frac{g''_0(g'_0 - g_0)}{g'_0(g''_0 - g_0)} = \frac{g''(g' - g)}{g'(g'' - g)}, \quad \sin^2 am\, a = \frac{g''_0 - g_0}{g''_0} = \frac{g'' - g}{g''},$$

nous avons eu

$$g'_0 = \frac{g_0}{\Delta^2 am\, a}, \quad g''_0 = \frac{g_0}{\cos^2 am\, a}.$$

Ces formules nous donnent de même

$$g'_0 + g''_0 - g_0 = g_0 \frac{1 - \varkappa^2 \sin^4 am\, a}{\cos^2 am\, a\, \Delta^2 am\, a},$$

$$g''_0 + g_0 - g'_0 = g_0 \frac{1 - 2\varkappa^2 \sin^2 am\, a + \varkappa^2 \sin^4 am\, a}{\cos^2 am\, a\, \Delta^2 am\, a},$$

$$g_0 + g'_0 - g''_0 = g_0 \frac{1 - 2 \sin^2 am\, a + \varkappa^2 \sin^4 am\, a}{\cos^2 am\, a\, \Delta^2 am\, a};$$

d'où, ayant égard aux formules (18), en y posant $i = 0$, on trouve

$$g_1 = \frac{g_0}{2} \frac{\Delta am\, 2a \cos am\, 2a\, (1 - \varkappa^2 \sin^4 am\, a)}{\cos^2 am\, a\, \Delta^2 am\, a},$$

$$g'_1 = \frac{g_0}{2} \frac{\cos am\, 2a\, (1 - \varkappa^2 \sin^4 am\, a)}{\Delta am\, 2a \cos^2 am\, a\, \Delta^2 am\, a},$$

$$g''_1 = \frac{g_0}{2} \frac{\Delta am\, 2a\, (1 - \varkappa^2 \sin^4 am\, a)}{\cos am\, 2a \cos^2 am\, a\, \Delta^2 am\, a},$$

donc

$$g'_1 = \frac{g_1}{\Delta^2 am\, 2a}, \quad g''_1 = \frac{g_1}{\cos^2 am\, 2a},$$

$$\varkappa^2 = \frac{g''_1 (g'_1 - g_1)}{g'_1 (g''_1 - g_1)}, \quad \sin^2 am\, 2a = \frac{g''_1 - g_1}{g''_1}.$$

c'est-à-dire, lorsque des racines g_0, g'_0, g''_0 on passe aux racines g_1, g'_1, g''_1, le module $\varkappa$ reste invariable, et l'argument a se redouble. Il en résulte qu'on peut immédiatement écrire les valeurs de g_i, g'_i, g''_i

$$(19^a) \quad \begin{cases} g'_i = \dfrac{g_i}{\Delta^2 am\, 2^i a}, \quad g''_i = \dfrac{g_i}{\cos^2 am\, 2^i a}, \\[2ex] g_i = g_{i-1} \dfrac{\sin am\, 2^{i-1} a \cos am\, 2^i a\, \Delta am\, 2^i a}{\sin am\, 2^i a \cos am\, 2^{i-1} a\, \Delta am\, 2^{i-1} a}, \end{cases}$$

et par conséquent

$$(19^b) \quad g_i = g_1 \frac{\sin am\, 2a \cos am\, 2^i a\, \Delta am\, 2^i a}{\sin am\, 2^i a \cos am\, 2a\, \Delta am\, 2a}.$$

8. Supposons maintenant que

$$\int \frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{z^4 + l z^3 + m z^2 + n z}}$$

(point de départ de nos transformations) s'exprime en termes finis, la constante A ayant une valeur convenable. Il a été démontré que le paramètre a acquiert dans ce cas la valeur $\frac{\nu K + \nu' K' i}{\lambda}$, où ν, ν' et λ sont des entiers, dont le dernier est un nombre impair. Soit à présent σ le moindre entier satisfaisant à la congruence

$$2^\sigma \equiv 2 \pmod{\lambda},$$

laquelle est toujours soluble, λ étant un nombre impair. Soit

$$2^\sigma = 2 + h\lambda,$$

où le nombre h est évidemment pair.

Si, dans les formules (18) et (19), on attribue à i la valeur σ et si l'on remplace a par $\frac{\nu K + \nu' K' i}{\lambda}$, on aura

$$g_\sigma = g_1, \quad g'_\sigma = g'_1, \quad g''_\sigma = g''_1,$$

et, par conséquent,

$$l_\sigma = l_1, \quad m_\sigma = m_1, \quad n_\sigma = n_1.$$

Donc, si l'intégrale donnée s'exprime en termes finis, les quantités l_i, m_i, n_i sont périodiques. Si les nombres ν et ν' sont pairs, on aura

$$l_{\sigma-1} = l_0, \quad m_{\sigma-1} = m_0, \quad n_{\sigma-1} = n_0,$$

et par conséquent la période commencera par l_0, m_0, n_0; mais lorsque au moins l'un des nombres ν et ν' sera impair, la période ne commencera que par l_1, m_1, n_1.

Maintenant nous allons démontrer que, dans le cas de périodicité, tous les nombres l_i, m_i, n_i sont des entiers, pourvu que l_0, m_0, n_0 le soient.

Posons

$$\frac{(l_i^2 - 4m_i)^3}{2l_i - 8l_i m_i + 16n_i} = \alpha_i,$$

i étant un entier quelconque, et démontrons que, dans le cas de périodicité, les systèmes l_i, m_i, n_i et tous les nombres α_i seront entiers. Nous allons le prouver d'abord pour le nombre α_0, et, pour cet effet, cherchons la forme générale des expressions l_i, m_i, n_i en l_0, m_0, n_0 et α_0, lesquelles sont respectivement égales à l, m, n, α.

On a

$$(20)\qquad \begin{cases} l_1 = -l - \alpha, \quad 4m_1 = -8m + 3l^2, \\ 8n_1 = -8n + 4lm - l^3. \end{cases}$$

Remarquons d'abord que l_i, m_i, n_i peuvent être exprimés en α par les formules

$$l_i = \frac{\Phi_i \alpha}{\varphi_i \alpha}, \quad 4m_i = \frac{\Psi_i \alpha}{\psi_i \alpha}, \quad 8n_i = \frac{\Omega_i \alpha}{\omega_i \alpha},$$

où Φ_i, φ_i, Ψ_i, ψ_i, Ω_i, ω_i sont des fonctions entières rationnelles de α à coefficients entiers (ces coefficients renferment l, m, n). En outre, ces fonctions seront de la forme

$$(21)\qquad \begin{cases} \Phi_i \alpha = 3\alpha^{p_i} + \ldots, \quad \varphi_i \alpha = 2^{i-1}\,(\alpha^{p_i - 1} + \ldots); \\ \Psi_i \alpha = 3\alpha^{q_i} + \ldots, \quad \psi_i \alpha = 2^{2i-1}\,(\alpha^{q_i - 2} + \ldots); \\ \Omega_i \alpha = \alpha^{r_i} + \ldots, \quad \omega_i \alpha = 2^{3i-6}\,(\alpha^{r_i - 3} + \ldots). \end{cases}$$

Les exposants des termes vont en décroissant; nous avons affecté des parenthèses les fonctions entières de α à coefficients entiers. On peut très-aisément vérifier ces formules pour les nombres l_2, m_2, n_2. En effet, après avoir substitué, dans les formules (17), au lieu de l_1, m_1, n_1, leurs valeurs (20), on aura

$$l_2 = \frac{3\alpha^4 + \ldots}{2\alpha^3 + \ldots}, \quad 4m_2 = 3\alpha + \ldots, \quad 8n_2 = \alpha^3 + \ldots;$$

donc $\psi_2 \alpha$ et $\omega_2 \alpha$ sont égaux à l'unité.

Afin d'établir la généralité des formules (21), nous supposerons

qu'elles subsistent pour un nombre quelconque i et prouverons qu'elles ont encore lieu pour $i+1$.

Nous avons

$$l_{i+1} = -l_i - \frac{(l_i^2 - 4m_i)^2}{2l_i^3 - 8l_i m_i + 16n_i}$$

$$= -\frac{2\Phi_i\alpha\psi_i\alpha(\Phi_i^2\alpha\psi_i\alpha\omega_i\alpha - \Phi_i\alpha\Psi_i\alpha\omega_i\alpha\varphi_i^2\alpha + \Omega_i\alpha\varphi_i\alpha\psi_i\alpha) + \omega_i\alpha(\Phi_i^2\alpha\psi_i\alpha - \Psi_i\alpha\varphi_i^2\alpha)^2}{2\varphi_i\alpha\psi_i\alpha(\Phi_i^2\alpha\psi_i\alpha\omega_i\alpha - \Phi_i\alpha\Psi_i\alpha\omega_i\alpha\varphi_i^2\alpha + \Omega_i\alpha\varphi_i\alpha\psi_i\alpha)}.$$

Après avoir remplacé les fonctions $\Phi_i\alpha$, $\varphi_i\alpha, \ldots$ par leurs valeurs, on obtient, en réduisant,

$$l_{i+1} = \frac{3\alpha^{p_{i+1}} + \ldots}{2^i(\alpha^{p_{i+1}-1} + \ldots)},$$

où

$$p_{i+1} = 4p_i + 2q_i + r_i - 7.$$

D'une manière analogue on trouve

$$4m_{i+1} = \frac{3\Phi_i\alpha\psi_i\alpha - 2\varphi_i^2\alpha\Psi_i\alpha}{\psi_i\alpha\varphi_i^2\alpha} = \frac{3\alpha^{q_{i+1}} + \ldots}{2^{2i-2}(\alpha^{q_{i+1}-2} + \ldots)},$$

où

$$q_{i+1} = 2p_i + q_i - 2,$$

$$8n_{i+1} = \frac{\Omega_i(\alpha)\psi_i\alpha\varphi_i\alpha - \omega_i(\alpha)\Psi_i(\alpha)\Phi_i(\alpha)\varphi_i^2(\alpha) + \Phi_i^3(\alpha)\psi_i\alpha\omega_i\alpha}{\omega_i(\alpha)\psi_i(\alpha)\varphi_i(\alpha)}$$

$$= \frac{\alpha^{r_{i+1}} + \ldots}{2^{3i-3}(\alpha^{r_{i+1}-3} + \ldots)},$$

où

$$r_{i+1} = 3p_i + q_i + r_i - 5.$$

Par conséquent, les formules (21) ont lieu pour $i+1$: c'est ce que nous voulions prouver. Il a été démontré plus haut que, lorsque l'intégrale donnée s'exprime en logarithmes, nous arriverons de nouveau aux nombres l_1, m_1, n_1, les systèmes l_i, m_i, n_i se succédant périodiquement. Soient, comme il a été supposé, $l_\sigma = l_1$, $m_\sigma = m_1$, $n_\sigma = n_1$.

On a, dans ce cas,

$$(22)\qquad 8n_1 = \frac{\Omega_\sigma \alpha}{\omega_\sigma \alpha},$$

ou

$$\Omega_\sigma \alpha - 8n_1 \omega_\sigma \alpha = 0.$$

En remarquant que

$$8n_1 = -8n + 4lm - l^3$$

est un nombre entier, on voit que α est une racine rationnelle de l'équation à coefficients entiers, dont le premier terme a l'unité pour coefficient; donc α sera un nombre entier. De ce que

$$\alpha = \frac{(l^2 - 4m)^2}{2l^3 - 8lm + 16n}$$

est un nombre entier, on voit que l doit être pair; par conséquent

$$l_1 = -l - \alpha, \quad m_1 = -2m + \tfrac{3}{4} l^2,$$
$$n_1 = -n + \tfrac{1}{2} lm - \tfrac{1}{8} l^3$$

seront des nombres entiers.

Soit à présent

$$\frac{(l_1^2 - 4m_1)^2}{2l_1^3 - 8l_1 m_1 + 16n_1} = \alpha_1.$$

En remplaçant dans la formule (22) les nombres l, m, n par l_1, m_1, n_1 et α par α_1, on aura $8n_{\sigma+1}$ au lieu de $8n_\sigma$, savoir :

$$8n_{\sigma+1} = 8n_2 = \frac{\Omega'_\sigma(\alpha_1)}{\omega'_\sigma(\alpha_1)};$$

les nombres l_1, m_1, n_1 entrent dans les coefficients des fonctions Ω'_σ et ω'_σ de la même manière que l, m, n dans ceux de Ω_σ et ω_σ.

Comme

$$8n_2 = -8n_1 + 4l_1 m_1 - l_1^3$$

est un nombre entier; d'après l'équation

$$\Omega'_1(\varkappa_1) - 8n_2\omega'_1(\varkappa_1) = 0,$$

que $\varkappa_1$ est un nombre entier : donc l_2, m_2, n_2 seront aussi des entiers. On voit de la même manière que l_3, m_3, n_3,... sont aussi des entiers.

9. Pour achever la démonstration de la méthode de M. Tchebichef, il ne nous reste qu'à faire voir que les nombres des systèmes l_i, m_i, n_i que l'on obtient avant que la périodicité soit manifestée ne surpassent pas une limite finie. Nous reprendrons, pour cet effet, les relations qui existent entre les racines g_{i+1}, g'_{i+1}, g''_{i+1} et g_i, g'_i, g''_i. On a

$$g'_{i+1}(g''_{i+1} - g_{i+1}) = \frac{g^2_{i+1}\sin^2 am 2^i a}{\Delta^2 am 2^i a \cos^2 am 2^i a}$$

$$= \frac{g^2_i \sin^2 am 2^{i-1} a}{\Delta^2 am 2^{i-1} a \cos^2 am 2^{i-1} a} = g'_i(g''_i - g_i),$$

$$g_{i+1}(g'_{i+1} - g''_{i+1}) = -g^2_{i+1}\frac{\varkappa'^2 \sin^2 am 2^i a}{\cos^2 am 2^i a\, \Delta^2 am 2^i a}$$

$$= -\frac{g^2_i \varkappa'^2 \sin^2 am 2^{i-1} a}{\Delta^2 am 2^{i-1} a \cos^2 am 2^{i-1} a} = g_i(g'_i - g''_i),$$

$$g''_{i+1}(g_{i+1} - g'_{i+1}) = -g^2_{i+1}\frac{\varkappa'^2 \sin^2 am 2^i a}{\cos^2 am 2^i a\, \Delta^2 am 2^i a}$$

$$= -\frac{g^2_i \varkappa'^2 \sin^2 am 2^{i-1} a}{\Delta^2 am 2^{i-1} a \cos^2 am 2^{i-1} a} = g''_i(g_i - g'_i).$$

Des relations ci-dessus, il vient

$$g^2_{i+1}(g'_{i+1} - g''_{i+1})^2 + g'^2_{i+1}(g''_{i+1} - g_{i+1})^2 + g''^2_{i+1}(g_{i+1} - g'_{i+1})^2$$
$$= g^2_i(g'_i - g''_i)^2 + g'^2_i(g''_i - g_i)^2 + g''^2_i(g_i - g'_i)^2.$$

En y introduisant les coefficients l_i, m_i, n_i, l_{i+1}, m_{i+1}, n_{i+1} au lieu des racines, on aura

$$m^2_{i+1} - 3l_{i+1}n_{i+1} = m^2_i - 3l_i n_i.$$

Des mêmes relations on a

$$\begin{aligned} & g_{i+1}^2 g'^2_{i+1} g''^2_{i+1} (g_{i+1} - g'_{i+1})^2 (g'_{i+1} - g''_{i+1})^2 (g''_{i+1} - g_{i+1})^2 \\ & \quad = g_i^2 g'^2_i g''^2_i (g_i - g'_i)^2 (g'_i - g''_i)^2 (g''_i - g_i)^2, \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{aligned} & n_{i+1}^2 (4 l_{i+1}^3 n_{i+1} - l_{i+1}^2 m_{i+1}^2 - 18 l_{i+1} m_{i+1} n_{i+1} + 4 m_{i+1}^3 + 27 n_{i+1}^2) \\ & \quad = n_i^2 (4 l_i^3 n_i - l_i^2 m_i^2 - 18 l_i m_i n_i + 4 m_i^3 + 27 n_i^2). \end{aligned}$$

Il suit des égalités obtenues que le nombre de différents systèmes l_i, m_i, n_i ne surpassera pas celui des solutions entières des équations

$$\begin{aligned} & Y^2 - 3XZ = m^2 - 3ln, \\ & Z^2 (4X^3 Z - X^2 Y^2 - 18XYZ + 4Y^3 + 27Z^2) \\ & \quad = n^2 (4l^3 n - l^2 m^2 - 18lmn + 4m^3 + 27n^2). \end{aligned}$$

Ces solutions X, Y, Z ne peuvent être qu'en nombre limité, comme l'a démontré M. Tchebichef lui-même [*].

---

[*] *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, 1864, p. 235.

Extrait d'une Lettre adressée à M. Besge;

Par M. J. LIOUVILLE.

« ... En désignant par x une variable indépendante, et par n une constante, puis considérant l'équation

$$\mathrm{U} = \frac{\sin^n x}{n} e^{nx\sqrt{-1}},$$

on trouve tout de suite que

$$\frac{d\mathrm{U}}{dx} = \sin^{n-1} x\, e^{(n+1)x\sqrt{-1}},$$

d'où résulte naturellement l'intégrale indéfinie

$$\text{(A)} \qquad \int \sin^{n-1} x\, e^{(n+1)x\sqrt{-1}}\, dx = \frac{\sin^n x}{n} e^{nx\sqrt{-1}}.$$

» Si l'on mettait pour les exponentielles imaginaires leurs valeurs exprimées en sinus et cosinus, on serait amené à décomposer cette équation en deux autres, savoir :

$$\text{(1)} \qquad \int \sin^{n-1} x \cos(n+1)x\, dx = \frac{\sin^n x \cos nx}{n}$$

et

$$(2) \qquad \int \sin^{n-1} x \sin(n+1) x \, dx = \frac{\sin^n x \sin nx}{n},$$

qui ont été indiquées déjà par Euler dans un de ses Mémoires posthumes [*], et dont la vérification directe, sans être difficile, donne lieu cependant pour chacune d'elles à des calculs plus longs et plus compliqués que celle de notre équation unique (A).

» On condensera semblablement en une seule formule les deux formules intégrales suivantes, qu'Euler donne aussi dans le Mémoire cité :

$$(3) \qquad \int \cos^{n-1} x \cos(n+1) x \, dx = \frac{1}{n} \cos^n x \sin nx$$

et

$$(4) \qquad \int \cos^{n-1} x \sin(n+1) x \, dx = -\frac{1}{n} \cos^n x \cos nx;$$

il suffira pour cela d'ajouter les équations (3) et (4) membre à membre, après avoir multiplié la seconde par le facteur $\sqrt{-1}$. On trouvera ainsi l'équation

$$(B) \qquad \int \cos^{n-1} x \, e^{(n+1)x\sqrt{-1}} \, dx = -\sqrt{-1} \, \frac{\cos^n x}{n} \, e^{nx\sqrt{-1}},$$

qui équivaut à ces deux-là et qui peut les remplacer.

» Je vous renvoie pour de plus longs détails, et pour des développements curieux, au Mémoire d'Euler déjà cité. Il me suffit d'avoir

[*] Ce Mémoire a pour titre : *Quatuor theoremata notatu digna in Calculo integrali.* On le trouve dans les *Nova Acta Acad. Petrop.* pour 1789. (J. L.)

attiré sur ce Mémoire votre attention exercée : je ne puis avoir d'autre objet.

» J'ajouterai cependant que, la constante n étant arbitraire dans nos formules, on peut effectuer sous le signe intégral des différentiations par rapport à ce paramètre, d'où naîtront de nouvelles formules en apparence plus compliquées, puisqu'elles contiendront des logarithmes. »

Réponse à la Lettre précédente;

Par M. BESGE.

« ... En vous remerciant de votre Lettre, je me permets d'ajouter une formule que je conclus tout de suite de votre équation (A), et qui me paraît mériter d'être écrite. En désignant par y une variable indépendante de 0 à 1, et par $\varphi(t)$ une fonction quelconque de t, développable pourtant suivant les puissances de t, je trouve que l'on doit avoir cette égalité de deux intégrales

$$(a) \quad \int_0^1 \sin x\, e^{x\sqrt{-1}} \varphi(y \sin x\, e^{x\sqrt{-1}})\, dy = \int_0^x e^{2x\sqrt{-1}} \varphi(\sin x\, e^{x\sqrt{-1}})\, dx.$$

On déduirait aisément une formule semblable (b) de votre équation (B). Je me garderai bien d'insister sur ces généralisations faciles, dont le principe et la démonstration ne peuvent pas échapper à une personne avertie.

» Recevez, etc. »

Sur un nouveau principe de Mécanique relatif aux mouvements stationnaires;

Par M. R. CLAUSIUS.

(Lu à la Société Rhénane des Sciences naturelles et médicales le 16 juin 1873. Traduit de l'allemand par M. F. Folie.)

Dans un Mémoire publié en 1870 [*], j'ai établi et démontré, pour un point matériel qui se meut sur une trajectoire fermée, une équation qui a des rapports étroits avec le principe de la moindre action et avec celui de Hamilton, mais qui en diffère néanmoins d'une manière essentielle. Dans la suite de ce même Mémoire, j'ai cherché à appliquer cette équation à la Théorie de la chaleur; mais ce sujet, considéré même d'un point de vue purement mécanique, m'a paru d'une assez grande importance pour me déterminer à le poursuivre dans cette direction, et à donner à l'équation que j'avais établie une forme aussi générale que possible; l'application de cette équation à des cas particuliers en sera naturellement facilitée et rendue plus sûre. C'est le résultat de cette recherche que je me propose de communiquer dans ces pages.

1. Il sera utile d'établir d'abord l'équation sous sa première forme, et d'y relier ensuite les développements ultérieurs.

Soit donné un point matériel de masse m, soumis à l'action d'une force qui a une *fonction de force*, ou, suivant une autre dénomination, un *ergiel*, et décrivant sous l'influence de cette force une trajectoire

[*] *Sur la réduction du second principe fondamental de la Théorie mécanique de la chaleur à des principes généraux de Mécanique.* (*Bulletin de la Société rhénane des Sciences naturelles et médicales*, p. 167, 1870; *Annales de Poggendorff*, t. CXLII, p. 433; traduit en anglais dans le *Philosophical Magazine*, 4e série, t. XLII, p. 161.

fermée. Représentons par U l'ergiel, par v la vitesse du point, par i la durée de sa révolution. Nous aurons à prendre les moyennes des quantités qui sont variables pendant le mouvement, et nous désignerons ces moyennes en surmontant d'un trait horizontal le signe qui représente la grandeur variable.

Outre ce mouvement originairement donné du point, considérons-en un autre infiniment peu différent du premier, que nous nommerons *mouvement modifié*. La modification pourra être produite soit parce que le point de départ du mouvement a été changé, soit parce que les composantes de la vitesse initiale sont autres que dans le mouvement primitif. De plus, l'ergiel peut avoir subi une modification. Pour exprimer celle-ci, nous admettons que la fonction U renferme, outre les coordonnées du point mobile, une ou plusieurs quantités c_1, $c_2, \ldots$, qui sont constantes dans chaque mouvement, mais qui peuvent changer de valeur dans le passage d'un mouvement à l'autre.

Actuellement si, pour chacune des grandeurs considérées, nous envisageons la différence entre les valeurs qu'elle a, dans le mouvement primitif et dans le mouvement modifié, comme une variation de cette grandeur, que nous désignerons par la caractéristique δ, et si, pour abréger, nous comprenons sous un signe sommatoire les termes relatifs aux quantités c_1, $c_2, \ldots$, l'équation dont il s'agit s'écrira

$$(1) \qquad \delta\overline{U} - \sum \frac{d\overline{U}}{dc}\,\delta c = \frac{m}{2}\,\delta\overline{v^2} + m\overline{v^2}\,\delta\log i.$$

Il ne sera pas inutile d'ajouter ici la démonstration que j'ai donnée de cette équation, dans le travail cité plus haut.

Comme nous l'avons déjà dit, nous considérons comme variation d'une quantité la différence entre les deux valeurs que prend cette quantité dans le mouvement primitif et dans le mouvement modifié. Or, si la quantité dont on doit prendre la variation est variable dans le cours du mouvement, on devra, pour chaque valeur de cette quantité dans le mouvement primitif, trouver dans le mouvement modifié une valeur déterminée correspondante de cette quantité, et prendre, pour variation de celle-ci, la différence entre ces deux valeurs correspondantes.

Pour déterminer les valeurs correspondantes, nous procéderons de la manière suivante : nous choisirons, sur les deux trajectoires que le point parcourt dans les deux mouvements, deux positions infiniment voisines comme origines du mouvement, et nous prendrons pour origines du temps les moments où le point mobile a passé par ces positions. Nous désignerons respectivement par t et t^* le temps compté à partir de ces origines dans le mouvement primitif et dans le mouvement modifié, et nous poserons

$$t = i\varphi \quad \text{et} \quad t^* = (i + \delta i)\varphi,$$

φ étant une quantité que j'ai appelée *la phase du mouvement*, et qui, dans les deux mouvements, augmente d'une unité pendant chaque révolution. Cette quantité étant ainsi définie, nous prendrons pour règle de *considérer comme correspondantes les valeurs d'une variable qui appartiennent à des phases égales*.

D'après cette règle, les équations précédentes donnent, pour la variation du temps,

$$\delta t = t^* - t = \varphi\, \delta i,$$

tandis que la différentielle du temps sera

$$dt = i\, d\varphi.$$

Considérons à présent une autre variable, par exemple l'une des coordonnées x du point mobile, et, en supposant que sa variation δx soit formée d'après la règle précédente, prenons les coefficients différentiels de cette variation par rapport à φ et à t. Comme φ a été considéré comme constant dans la formation de la variation, on pourra, en prenant le coefficient différentiel par rapport à φ, intervertir l'ordre de la différentiation et de la variation, et poser

$$\frac{d(\delta x)}{d\varphi} = \delta \frac{dx}{d\varphi};$$

mais il ne sera pas permis d'intervertir cet ordre dans la formation des coefficients différentiels pris par rapport au temps t; pour ceux-ci,

on aura les équations suivantes :

$$\frac{d\,\delta x}{dt} = \frac{d\,\delta x}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt}$$

$$= \delta\,\frac{dx}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt}$$

$$= \delta\left(\frac{dx}{dt}\,\frac{dt}{d\varphi}\right)\frac{d\varphi}{dt}.$$

En remplaçant dans ces équations les coefficients différentiels $\frac{dt}{d\varphi}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$ par leurs valeurs i et $\frac{1}{i}$ déduites de l'équation précédente $dt = i\,d\varphi$, nous pourrons écrire

$$\frac{d\,\delta x}{dt} = \delta\left(\frac{dx}{dt}\,i\right)\frac{1}{i}$$

$$= \left(i\,\delta\,\frac{dx}{dt} + \frac{dx}{dt}\,\delta i\right)\frac{1}{i}$$

$$= \delta\,\frac{dx}{dt} + \frac{dx}{dt}\,\delta\log i.$$

Ces préliminaires exposés, différentions, par rapport à t, le produit $\frac{dx}{dt}\,\delta x$; nous obtiendrons

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\,\delta x\right) = \frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{dx}{dt}\,\frac{d(\delta x)}{dt}$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{dx}{dt}\,\delta\,\frac{dx}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\delta\log i$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{1}{2}\,\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\delta\log i.$$

Multiplions cette équation par dt, et intégrons ensuite, pour la durée d'une révolution entière, c'est-à-dire depuis $t = 0$ jusqu'à $t = i$.

L'intégrale du premier membre a pour valeur zéro, parce que le produit $\frac{dx}{dt}\,\delta x$ a, pour $t = i$, la même valeur que pour $t = 0$. Afin de pouvoir écrire l'intégrale du second membre sous une forme commode, nous ferons usage du signe que nous avons adopté pour représenter les valeurs moyennes, et à l'aide duquel nous pourrons écrire,

Z représentant une variable quelconque qui se rapporte au mouvement considéré,

$$\int_0^i Z\,dt = i\overline{Z}.$$

De cette manière, l'équation qui résulte de l'intégration prend la forme suivante :

$$o = i\left[\overline{\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x} + \frac{1}{2}\,\delta\,\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} + \overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\,\delta\log i\right].$$

Nous pourrons supprimer le facteur i, commun à tous les termes. En outre, il y a encore une remarque à faire relativement à ce second membre : l'espèce de variation que nous avons introduite jouit de cette propriété particulière, que la valeur moyenne de la variation d'une quantité est égale à la variation de la valeur moyenne de cette quantité, de sorte qu'on peut poser

$$\delta\,\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \overline{\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}.$$

Si nous transposons enfin le premier terme d'un membre dans l'autre, l'équation prendra la forme

$$-\overline{\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x} = \frac{1}{2}\,\delta\,\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} + \overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\,\delta\log i.$$

Nous aurons évidemment des équations analogues en y et z, et, si nous faisons la somme de ces trois équations, en écrivant

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = v^2,$$

nous obtiendrons

$$-\overline{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right)} = \frac{1}{2}\,\delta\overline{v^2} + \overline{v^2}\,\delta\log i.$$

Après avoir multiplié les deux membres par la masse m du point mobile, nous pourrons remplacer les produits $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$

par les composantes X, Y, Z de la force qui le sollicite; l'équation deviendra ainsi

$$-(\overline{X\partial x} + \overline{Y\partial y} + \overline{Z\partial z}) = \frac{m}{2}\partial\overline{v^2} + m\overline{v^2}\,\partial\log i.$$

Admettons enfin que la force qui agit sur le point matériel mobile a un ergiel. Si nous représentons celui-ci par U, nous savons que

$$X = -\frac{dU}{dx}, \quad Y = -\frac{dU}{dy}, \quad Z = -\frac{dU}{dz},$$

et, par suite, dans les cas où l'ergiel est représenté par la même fonction des coordonnées dans le mouvement modifié que dans le mouvement primitif, nous pourrons écrire

$$\partial U = -(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z).$$

Si, au contraire, dans le mouvement modifié, l'ergiel est représenté par une fonction un peu différente, en ce sens que certaines constantes $c_1, c_2, \ldots$, qui entrent dans l'expression de la fonction, prendraient, dans le mouvement modifié, les valeurs variées $c_1 + \partial c_1$, $c_2 + \partial c_2, \ldots$, on devra écrire

$$\begin{aligned}\partial U &= -(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z) + \frac{dU}{dc_1}\partial c_1 + \frac{dU}{dc_2}\partial c_2 + \ldots \\ &= -(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z) + \sum \frac{dU}{dc}\partial c.\end{aligned}$$

En tenant compte de cette équation, nous pourrons donner à celle que nous avons établie plus haut la forme suivante :

$$\partial\overline{U} - \sum \overline{\frac{dU}{dc}}\,\partial c = \frac{m}{2}\partial\overline{v^2} + m\overline{v^2}\,\partial\log i,$$

ce qui est l'équation (1), que nous avions à démontrer.

2. Pour généraliser cette équation, on pourrait supposer d'abord qu'au lieu d'un seul point matériel mobile il y en ait plusieurs qui se meuvent tous sur des trajectoires fermées. Si les durées de toutes les

révolutions étaient, dans ce cas, égales, et se modifiaient de la même manière dans le passage d'un mouvement à un autre, l'extension de l'équation à ce cas s'effectuerait évidemment sans la moindre difficulté. Si, au contraire, les durées des révolutions sont différentes et varient dans des rapports différents, cette extension exige de nouveaux développements.

Un cas plus général encore est celui où les points ne parcourent pas des trajectoires fermées, mais où, les coordonnées de ces points variant d'une manière périodique, les périodes ont des durées différentes, et qui peuvent même varier suivant des rapports différents dans le passage d'un mouvement à l'autre.

Ce dernier cas est encore susceptible d'une extension plus grande, en ce sens que ce ne seraient pas les coordonnées elles-mêmes qui seraient affectées de ces variations périodiques, mais plutôt certaines quantités dont les coordonnées seraient des fonctions.

On peut enfin généraliser davantage encore l'hypothèse précédente, en admettant que ces quantités, en fonction desquelles s'expriment les coordonnées, au lieu de varier périodiquement, sont soumises à une condition mathématique moins restrictive, qui sera remplie par des variations périodiques, mais pourra l'être également sans que ces variations soient nécessairement périodiques : c'est ce dernier cas que nous allons traiter.

3. Avant de l'aborder, nous commencerons par exposer quelques considérations de Mécanique, qui serviront à faciliter l'intelligence du sujet.

Soit donné un système de points matériels de masses respectives m_1, m_2,..., se mouvant sous l'influence de forces qui ont un ergiel. Si les positions de ces points sont déterminées par les coordonnées rectangulaires x_1, y_1, z_1; $x_2, y_2, z_2, \ldots$, l'ergiel U sera une fonction de ces coordonnées. La force vive du système s'exprimera par la formule suivante, si nous convenons de représenter par des lettres accentuées les coefficients différentiels des variables pris par rapport au temps, ainsi $\frac{dx_1}{dt}$ par x'_1 :

$$(2)\qquad T = \sum \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

On sait qu'il existe une relation simple entre T et U. Pour l'exprimer il s'agit d'abord de déterminer le signe dont on affectera l'ergiel U. On choisit ordinairement ce signe de telle sorte que la différentielle de U représente le travail effectué pendant un déplacement infiniment petit des points matériels, et que par suite le principe de l'équivalence de la force vive et du travail soit exprimé par l'équation

$$T = U + \text{const.}$$

Mais si l'on veut donner à ce principe la forme sous laquelle on s'en sert aujourd'hui, surtout grâce aux belles recherches de Helmholtz, et qui répond à la dénomination usitée de *Principe de la conservation de l'énergie*, il est plus commode de prendre l'ergiel U en signe contraire, de sorte que sa différentielle prise *négativement* représente le travail effectué, et qu'on devra écrire, par suite,

$$T + U = \text{const.}$$

Alors T et U sont les deux quantités que Rankine a nommées l'énergie actuelle et l'énergie potentielle, et dont la somme constante est l'énergie totale ou simplement l'*énergie* du système. Si nous représentons cette dernière par E, l'équation précédente s'écrira

$$T + U = E. \tag{3}$$

Actuellement si, pour déterminer les positions des points mobiles, nous nous servons, au lieu des coordonnées rectangulaires, d'autres variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$, l'ergiel U devra naturellement être considéré comme une fonction de ces variables. Quant aux autres quantités qui entrent dans les équations du mouvement, et quant aux formes que prennent celles-ci lorsqu'on fait usage de ces variables générales, elles ont été déterminées par Lagrange dans sa *Mécanique analytique*.

Afin de reconnaître ce que devient dans ce cas l'expression de la force vive, nous poserons, puisque les coordonnées rectangulaires des points sont des fonctions de ces variables générales,

$$x = f(q_1, q_2, \ldots, q_n);$$

de là résulte

$$\frac{dx}{dt} = \frac{df}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{df}{dq_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{df}{dq_n}\frac{dq_n}{dt},$$

que nous pouvons aussi écrire

(4) $$x' = \frac{df}{dq_1}q'_1 + \frac{df}{dq_2}q'_2 + \ldots + \frac{df}{dq_n}q'_n.$$

Toutes les vitesses composantes des points mobiles s'exprimeront de la même manière. Comme les coefficients différentiels $\frac{df}{dq_1}, \frac{df}{dq_2}, \ldots, \frac{df}{dq_n}$ sont des fonctions des n quantités q, les expressions des vitesses composantes renfermeront les n quantités q ainsi que les n quantités q', et elles seront homogènes et du premier degré relativement à celles-ci. Si l'on suppose ces expressions introduites dans l'équation (2), on obtiendra pour la force vive T une expression qui renfermera aussi les quantités $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, et qui sera une fonction homogène du second degré relativement à cette dernière série de quantités.

De cette circonstance il résulte qu'on peut écrire

$$2T = \frac{dT}{dq'_1}q'_1 + \frac{dT}{dq'_2}q'_2 + \ldots + \frac{dT}{dq'_n}q'_n,$$

ou bien, en faisant usage du signe sommatoire,

(5) $$2T = \sum \frac{dT}{dq'}q'.$$

Comme les coefficients différentiels de T, qui figurent dans cette expression, reviendront fréquemment par la suite, il sera utile de les représenter par un symbole plus simple. Nous nous servirons à cette fin de la lettre p affectée de l'indice ν, qui représentera l'un des nombres entiers de 1 à n; ainsi

(6) $$p_\nu = \frac{dT}{dq'_\nu}.$$

L'équation précédente s'écrira alors

(7) $$2T = \Sigma pq'.$$

Les équations différentielles du mouvement prennent, d'après Lagrange, pour les variables générales q, la forme suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{dq'}\right) = \frac{dT}{dq} - \frac{dU}{dq},$$

ou bien, en vertu de (6),

$$\text{(8)} \qquad \frac{dp_i}{dt} = \frac{dT}{dq_i} - \frac{dU}{dq_i}.$$

4. Pour ce qui regarde les équations démontrées par Hamilton dans ses Mémoires de 1834 à 1835 (*), si l'on représente les valeurs initiales de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ par $k_1, k_2, \ldots, k_n$ et $h_1, h_2, \ldots, h_n$, elles s'écriront

$$\text{(I)} \qquad \delta\int_0^t 2\,T\,dt = \Sigma(p\,\delta q - h\,\delta k) + t\,\delta E,$$

$$\text{(I}_a\text{)} \qquad \delta\int_0^t (T - U)\,dt = \Sigma(p\,\delta q - h\,\delta k) - E\,\delta t.$$

Ces deux équations ne diffèrent pas essentiellement l'une de l'autre, puisque la seconde se déduit immédiatement de la première en tenant compte de l'équation $T + U = E$. On peut donc les considérer comme une équation unique mise sous deux formes différentes.

Dans la première forme de l'équation, l'intégrale

$$\int_0^t 2\,T\,dt$$

doit être regardée comme une fonction des quantités $q_1, q_2, \ldots, q_n$, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ et E; et l'équation se décomposera par suite en autant d'équations différentes qu'il y a de variations indépendantes dans le second membre. Du moment que la fonction représentée par cette intégrale sera connue, on pourra par la simple élimination de la quantité E entre les équations qui résultent de cette décomposition, former

(*) *Phil. Trans. for the years* 1834 *and* 1835.

toutes les intégrales premières et secondes des équations différentielles du mouvement. La seconde forme de l'équation est sous ce rapport encore plus favorable. Dans celle-ci l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t} (T - U)\,dt$$

doit être regardée comme une fonction des quantités $q_1, q_2, \ldots, q_n$ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ et t; et lorsque cette fonction est connue, on obtient immédiatement, par la décomposition de l'équation, les intégrales premières et secondes des équations différentielles du mouvement.

5. On voit aisément par ce qui précède que l'équation de Hamilton est de la plus haute importance en Mécanique. Néanmoins elle n'est pas, pour deux motifs, appropriée à notre but.

En premier lieu, quelque générale qu'elle soit sous d'autres rapports, elle n'a pas assez de généralité dans un certain sens. Dans cette équation deux mouvements infiniment peu différents sont comparés entre eux, et leur différence peut être ramenée à ce que les coordonnées et les vitesses composantes initiales des points mobiles ont, dans l'un des mouvements, des valeurs un peu différentes de celles qu'elles ont dans l'autre; mais l'ergiel U est supposé, dans les deux mouvements, une seule et même fonction des coordonnées. Or la différence entre deux mouvements peut aussi être due à ce que l'ergiel a éprouvé une variation qui est indépendante de celle des coordonnées. Ce cas se présente très-fréquemment dans la théorie de la chaleur. Il en est ainsi lorsque les forces extérieures sous l'action desquelles les molécules d'un corps effectuent leurs mouvements éprouvent une modification qui peut s'exprimer mathématiquement par une variation de l'ergiel, et qui occasionne naturellement aussi un changement dans le mouvement moléculaire. Des passages de cette nature, d'un mouvement à un autre, ne peuvent pas se traiter au moyen de l'équation de Hamilton.

Le second des motifs mentionnés plus haut se rapporte spécialement aux mouvements stationnaires. Lorsque l'on veut définir un mouvement stationnaire comme tel, d'une manière précise, il ne s'agit pas de déterminer les lieux et les vitesses de tous les points en particulier, à

de certains moments, mais plutôt de déterminer le caractère général, indépendant du temps, de ce mouvement. Une équation qui doit remplir ce but peut, à la vérité, renfermer des termes variables, mais la variabilité de ceux-ci doit se renfermer entre de certaines oscillations de leurs valeurs qui se reproduisent de telle manière que l'équation présente les mêmes caractères essentiels pour un temps postérieur que pour un temps antérieur. S'il se présente, au contraire, des termes qui subissent avec le temps des variations de plus en plus grandes, de sorte que l'équation est autre pour un temps postérieur que pour un temps antérieur, cette circonstance la rendra impropre à notre but.

C'est de ce point de vue que nous allons examiner l'équation de Hamilton. Elle renferme les variations $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ qui peuvent se définir de la manière suivante : δq_ν est la différence entre la valeur que prend q_ν à un certain moment dans le mouvement primitif, et la valeur *correspondante* qu'il a dans le mouvement modifié. Il s'agit maintenant de savoir, parmi l'infinité de valeurs que prend l'une après l'autre q_ν dans le mouvement modifié, laquelle on doit regarder comme valeur correspondante. Hamilton ne s'est pas expliqué à ce sujet; mais l'étude attentive des développements et des équations qu'il donne fait aisément reconnaître comment il faut entendre les variations qui s'y présentent. Si nous partons des valeurs que les quantités $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ont au temps t dans le mouvement primitif, les valeurs correspondantes dans le mouvement modifié seront celles que ces quantités auront au temps $t + \delta t$, la variation δt étant encore indéterminée, mais *égale pour toutes les quantités*.

Que la variation δt ait en effet une valeur commune pour tout le système, c'est ce que l'on reconnaît immédiatement par ce fait que δt entre dans l'équation (I_a), comme une quantité qui s'applique à tout le système.

Une autre circonstance qui ne laisse subsister aucun doute à ce sujet est la suivante. Hamilton suppose dans la déduction de ses équations le principe de la conservation de l'énergie, en vertu duquel la somme T + U est constante. Or ce théorème n'est naturellement vrai que quand, dans la formation des quantités T et U, les variables qui déterminent les positions et les vitesses des points sont introduites avec les valeurs qu'elles ont à un même instant, que celui-ci soit t ou

$t+\delta t$; mais il n'est pas permis de réunir les valeurs qu'elles ont à des instants différents pour en former les quantités T et U. Dès lors, dans les équations ainsi obtenues, il va de soi, aussi longtemps que le contraire n'a pas été énoncé explicitement et établi comme admissible, qu'on n'a introduit dans le calcul que des valeurs simultanées de toutes les variables.

Pour voir maintenant de quelle manière se comportent ces variations qui répondent à une variation commune de temps δt, nous choisirons un cas simple comme exemple. Nous supposerons que, dans le mouvement primitif, tous les points décrivent des trajectoires fermées, et que, dans le mouvement modifié, ils décrivent également tous, en partant d'origines infiniment peu différentes, des trajectoires fermées infiniment voisines des premières, mais que les durées des révolutions soient modifiées dans différents rapports pour les différents points.

Comme la variation de temps δt est arbitraire, nous commencerons par poser $\delta t = 0$, c'est-à-dire nous regarderons comme correspondantes des valeurs des variables qui appartiennent à un même temps compté à partir de l'origine du mouvement. Lorsqu'un point a, dans les deux mouvements, des durées de révolution différentes, les deux positions qu'il occupe à un même temps, compté à partir de l'origine du mouvement, sont d'autant plus éloignées l'une de l'autre que le temps est plus grand. Il en résulte que les valeurs correspondantes des variables, qui dépendent des positions des points, deviennent de plus en plus différentes avec le temps, et que, par suite, les variations de ces variables ne subissent pas seulement des oscillations qui se répètent d'une manière périodique, mais qu'au contraire les variations de ces variables doivent devenir de plus en plus grandes avec le temps.

Si l'on ne pose pas, comme précédemment, la variation du temps δt égale à zéro, mais qu'on la choisisse d'une manière convenable eu égard à la durée de la révolution modifiée de l'un des points, on pourra à la vérité, pour les variables qui ne dépendent que de la position de ce point, faire en sorte que leurs variations ne changent que d'une manière périodique; mais quant aux autres variables qui dépendent de la position des autres points, dont les durées de révolution se sont modifiées dans d'autres rapports, elles resteront affectées

de cet inconvénient, que leurs variations croîtront de plus en plus avec le temps, ce qui rend l'équation impropre à notre but.

6. Je vais maintenant exposer la manière dont je traite les mouvements stationnaires.

Pour définir d'une manière précise les valeurs correspondantes d'une quantité quelconque Z, qui varie dans le cours du mouvement, et, par là même, la variation δZ qui représente la différence de ces valeurs correspondantes, nous choisirons une quantité qui dépend du temps, comme quantité régulatrice, et nous conviendrons de regarder comme correspondantes les valeurs de la variable Z qui répondent à des valeurs égales de la régulatrice.

Si l'on choisit d'abord le temps lui-même comme quantité régulatrice, on obtient le mode de variation dont il a été question plus haut, et que nous caractériserons en employant la lettre t en indice à côté du signe δ, c'est-à-dire en écrivant $\delta_t Z$.

Mais, au lieu du temps, on peut prendre comme régulatrice une autre quantité φ qui varie avec le temps, de sorte que φ peut être considéré comme fonction de t, ou réciproquement. Commençons par poser, en général, dans le mouvement primitif,

$$t = f(\varphi); \tag{9}$$

dans le mouvement modifié, où la relation entre le temps et la quantité φ peut être un peu différente, nous désignerons, pour distinguer, le temps par t^*, et nous poserons

$$t^* = f(\varphi) + \varepsilon f_1(\varphi), \tag{9a}$$

f et f_1 représentant des fonctions encore indéterminées, et ε un facteur constant infiniment petit. Si, dans ces deux équations, la quantité φ a la même valeur, les temps t et t^* devront être regardés comme correspondants. Si, en outre, la variable considérée plus haut a dans le mouvement primitif, au temps t, la valeur Z, et dans le mouvement modifié, au temps t^*, la valeur Z^*, alors Z et Z^* seront des valeurs correspondantes de cette quantité, et la différence $Z^* - Z$ sera sa variation. Nous désignerons ce mode de variation, dans lequel φ est la

quantité régulatrice, par $\delta_\varphi Z$. De même, la différence $t' - t$ qui, d'après les deux équations précédentes, a pour valeur $\varepsilon f_1(\varphi)$, sera désignée par $\delta_\varphi t$.

Nous avons précédemment représenté le temps par une fonction de φ que nous avons laissée indéterminée, et qui éprouve un changement infiniment petit dans le passage d'un mouvement à l'autre. Pour la détermination de cette fonction, on pourra se régler d'après la nature du sujet à traiter. Dans les recherches suivantes, nous avons choisi pour cette fonction une forme très-simple, qui se rattache à la notion de *phase* que j'ai introduite dans mon précédent Mémoire.

Pour définir cette notion de phase, commençons par supposer que les changements que la quantité Z éprouve dans le cours du mouvement aient lieu d'une manière périodique, et représentons par i la durée de la période. J'ai posé, pour ce cas, l'équation

$$(10) \qquad t = i\varphi,$$

et j'ai nommé *phase* du changement la quantité φ ainsi définie. Dans le mouvement modifié, représentons la durée de la période par $i + \delta i$, et posons

$$(10a) \qquad t' = (i + \delta i)\varphi.$$

Si, dans ces deux équations, la phase φ a la même valeur, t et t' seront des temps correspondants, et l'on aura par suite

$$(11) \qquad \delta_\varphi t = t' - t = \varphi \delta i.$$

De même, pour la quantité Z, les valeurs qui répondent à des phases égales sont correspondantes, et la variation $\delta_\varphi Z$ a ainsi une signification très-simple.

Des variations de cette nature ne prennent pas avec le temps des valeurs de plus en plus grandes, mais ne changent que périodiquement comme les quantités mêmes dont elles sont les variations.

7. La notion de phase qui a été définie précédemment, et qui se rapporte à des changements périodiques, peut s'appliquer à l'étude des

mouvements qui ont lieu régulièrement sur des trajectoires fermées; mais si l'on a un système de points qui, tout en se mouvant d'une manière stationnaire, ne décrivent pas des trajectoires fermées, et pour lesquels les valeurs des diverses variables qui déterminent les positions de ces points ne changent pas d'une façon périodique, on devra faire usage d'une notion un peu plus générale, que l'on peut également envisager comme une phase, en donnant à ce mot une signification un peu plus large.

En employant, comme plus haut, les quantités $q_1, q_2, \dots, q_n$, pour déterminer les positions des points, nous allons, sans supposer que chaque quantité accomplit régulièrement ses changements dans des périodes d'une durée déterminée, introduire cependant pour chacune d'elles un certain intervalle de temps. Désignons ces intervalles par $i_1, i_2, \dots, i_n$; à l'aide de ceux-ci, nous définirons, au moyen des équations suivantes, les phases relatives aux différentes quantités, phases que nous désignerons par $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$,

$$t = i_1\varphi_1 = i_2\varphi_2, \dots, = i_n\varphi_n. \tag{12}$$

Prenons maintenant les variations des variables $q_1, q_2, \dots, q_n$ de telle manière que, pour chaque variable, la phase qui lui correspond soit regardée comme la quantité régulatrice, qui reste constante dans l'acte de variation, tandis que l'intervalle de temps qui lui correspond peut subir un changement. Les variations ainsi formées devront être représentées, d'après ce qui précède, par les signes $\delta_\varphi q_1, \delta_\varphi q_2, \dots, \delta_\varphi q_n$.

Formons, au moyen de ces variations, pour la variable q_ν, la fraction

$$\frac{p\,\delta_\varphi q - h\,\delta i}{t}.$$

Si la quantité q_ν accomplissait ses changements d'une manière périodique, et que i_ν fût la durée de la période, la variation $\delta_\varphi q_\nu$ ne changerait aussi que périodiquement, et par suite cette fraction, qui a t pour dénominateur, accomplirait des oscillations de plus en plus faibles à mesure que le temps croît, et tendrait par suite vers zéro. Il en serait de même pour les n variables, si elles changeaient d'une manière périodique, les durées des périodes pouvant du reste être différentes pour les diffé-

rentes variables. Mais, au lieu d'admettre l'hypothèse que les changements des quantités $q_1, q_2, \ldots, q_n$ soient périodiques, nous poserons seulement la condition que la moyenne de la somme

$$\sum \frac{p\delta_\varphi q - h\delta k}{t}$$

devienne très-petite pour des temps considérables, condition qui, d'après ce que nous avons vu, est certainement remplie pour des changements périodiques, mais qui peut l'être aussi par d'autres changements qui ont lieu d'une manière stationnaire.

Ces préliminaires exposés, nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Si les variations, dans la formation desquelles les quantités $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, déterminées par les équations

$$t = i_1\varphi_1 = i_2\varphi_2 \ldots = i_n\varphi_n,$$

sont regardées comme constantes, satisfont à la condition que la somme

$$\sum \frac{pd_\varphi q - h\delta k}{t}$$

a une valeur moyenne qui tend vers zéro à mesure que le temps croît, on aura l'équation suivante :

$$\text{(II)} \qquad \delta\left(\overline{\mathrm{U}} - \overline{\mathrm{T}}\right) = \sum \overline{pq'}\, \delta \log i + \sum \overline{\frac{d\mathrm{U}}{dc}}\, \delta c,$$

dans laquelle le premier signe sommatoire s'étend, comme dans la somme précédente, à n termes répondant aux n variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$, tandis que le second s'étend aux quantités $c_1, c_2, \ldots$, renfermées dans U, *lesquelles sont constantes dans le cours de chaque mouvement, mais changent de valeur dans le passage d'un mouvement à l'autre.*

Cette équation (II) est la forme généralisée, que j'ai mentionnée en commençant, de mon équation. Tandis que, dans l'équation (I) de Hamilton l'intégrale $\int_0^t 2\mathrm{T}\,dt$ doit être regardée comme une fonction des

variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$, de leurs valeurs initiales $k_1, k_2, \ldots k_n$ et de l'énergie E, et que dans l'équation (I_a) l'intégrale $\int_0^t (\mathrm{T} - \mathrm{U})\,dt$ doit être regardée comme une fonction des quantités $q_1, q_2, \ldots, q_n, k_1, k_2, \ldots, k_n$ et t, dans celle-ci, au contraire, la valeur moyenne $\overline{\mathrm{U}} - \overline{\mathrm{T}}$ apparaît comme une fonction des intervalles de temps $i_1, i_2, \ldots, i_n$ et des quantités $c_1, c_2, \ldots$ Elle pourra également se séparer en autant d'équations partielles qu'il y aura de variations indépendantes dans le second membre; mais ces équations seront naturellement toutes différentes de celles qui résultent de la décomposition de l'équation de Hamilton.

8. Pour démontrer notre théorème, formons pour chacune des n variables le produit $p\delta_t q$, et différentions-le par rapport au temps. Nous obtiendrons ainsi

$$\frac{d}{dt}(p\,\delta_t q) = p\,\frac{d(\delta_t q)}{dt} + \frac{dp}{dt}\delta_t q = p\,\delta_t\left(\frac{dq}{dt}\right) + \frac{dp}{dt}\delta_t q = p\,\delta_t q' + \frac{dp}{dt}\delta_t q.$$

Introduisons, au lieu du signe abréviatif p, d'après (6), l'expression plus complète $\frac{d\mathrm{T}}{dq'}$, et posons, en outre, d'après (8),

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d\mathrm{T}}{dq} - \frac{d\mathrm{U}}{dq}.$$

Nous obtiendrons ainsi

$$(13) \qquad \frac{d}{dt}(p\,\delta_t q) = \frac{d\mathrm{T}}{dq'}\delta_t q' + \frac{d\mathrm{T}}{dq}\delta_t q - \frac{d\mathrm{U}}{dq}\delta_t q.$$

Une semblable équation a lieu pour chacune des n variables; si nous faisons la somme de ces n équations, nous aurons

$$(14) \qquad \frac{d}{dt}\sum p\,\delta_t q = \sum \frac{d\mathrm{T}}{dq'}\delta_t q' + \sum \frac{d\mathrm{T}}{dq}\delta_t q - \sum \frac{d\mathrm{U}}{dq}\delta_t q.$$

Comme la quantité T est une fonction de $2n$ quantités $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, on peut écrire

$$\delta_t \mathrm{T} = \sum \frac{d\mathrm{T}}{dq}\delta_t q + \sum \frac{d\mathrm{T}}{dq'}\delta_t q'.$$

Cette expression renferme les deux premières sommes du second membre de notre précédente équation. Quant à la dernière somme de ce second membre, si dans U les quantités $q_1, q_2, \ldots, q_n$ seules étaient variables, on pourrait la remplacer par $\delta_t U$; mais, comme par hypothèse U renferme encore d'autres quantités $c_1, c_2, \ldots,$ qui sont bien indépendantes du temps, mais peuvent changer de valeur dans le passage d'un mouvement à l'autre, il en résulte que

$$\delta_t U = \sum \frac{dU}{dq}\,\delta_t q + \sum \frac{dU}{dc}\,\delta c.$$

Au moyen des deux équations précédentes, l'équation (14) devient

$$\frac{d}{dt}\sum p\,\delta_t q = \delta_t T - \delta_t U - \sum \frac{dU}{dc}\,\delta c,$$

qu'on peut écrire

$$(15)\qquad \delta_t(U - T) = -\frac{d}{dt}\sum p\,\delta_t q + \sum \frac{dU}{dc}\,\delta c.$$

Multiplions par dt, intégrons de zéro à t, et divisons enfin par t: nous obtiendrons, en nous rappelant que h et k sont les valeurs initiales de p et de q,

$$\frac{1}{t}\int_0^t \delta_t(U - T)\,dt = -\sum \frac{p\,\delta_t q - h\,\delta k}{t} + \sum \frac{1}{t}\int_0^t \frac{dU}{dc}\,\delta c\,dt.$$

En nous servant de la notation introduite pour la désignation des valeurs moyennes, nous pourrons écrire, dans le dernier terme du second membre,

$$\frac{1}{t}\int_0^t \frac{dU}{dc}\,\delta c\,dt = \overline{\frac{dU}{dc}}\,\delta c.$$

Dans le premier membre, nous laisserons provisoirement le signe intégral, et nous nous bornerons à transposer le signe de variation δ_t, ce qui est permis, puisque t est regardé comme constant dans cette variation.

Notre équation deviendra ainsi

$$(16)\qquad \delta_t\left[\frac{1}{t}\int_0^t(\mathrm{U}-\mathrm{T})\,dt\right]=-\sum\frac{p\,\delta_t q-h\,\delta k}{t}+\sum\frac{\overline{d\mathrm{U}}}{dc}\,\delta c.$$

Dans le second membre nous introduirons, au lieu des variations dans lesquelles le *temps* est regardé comme constant, celles dans lesquelles les *phases* relatives aux variables respectives sont regardées comme constantes.

Le procédé qui conduit à cette transformation est sans difficulté, comme on va le voir. Soit représentée par Z une quantité quelconque, fonction du temps; posons, dans le mouvement primitif,

$$Z=\mathrm{F}(t),$$

et dans le mouvement modifié

$$Z^*=\mathrm{F}(t^*)+\varepsilon\mathrm{F}_1(t^*),$$

t et t^* désignant deux temps correspondants, F et F_1 deux fonctions quelconques et ε un facteur infiniment petit. Si l'on veut former la variation $\delta_t Z$, on n'aura qu'à poser simplement $t^*=t$, et prendre la différence Z^*-Z : on aura ainsi

$$\delta_t Z=\varepsilon\mathrm{F}_1(t).$$

Veut-on, au contraire, trouver la variation $\delta_\varphi Z$, on devra prendre pour t^* la valeur du temps qui répond à une valeur invariable de φ, c'est-à-dire

$$t^*=t+\delta_\varphi t,$$

et former ensuite la différence Z^*-Z. Alors on aura

$$\delta_\varphi Z=\mathrm{F}(t+\delta_\varphi t)+\varepsilon\mathrm{F}_1(t+\delta_\varphi t)-\mathrm{F}(t).$$

De là résulte, en négligeant les termes d'ordre supérieur en $\delta_\varphi t$ et en ε,

$$\delta_\varphi Z=\varepsilon\mathrm{F}_1(t)+\frac{d\mathrm{F}(t)}{dt}\,\delta_\varphi t,$$

équation qu'on peut aussi écrire, d'après ce qui précède,

$$(17)\qquad \delta_\varphi Z = \delta_t Z + Z' \delta_\varphi t.$$

On aura une équation de la même forme pour chacune des variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$, en employant successivement chacune des phases $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. On obtiendra ainsi pour q_ν, en écrivant les termes dans un ordre différent,

$$\delta_t q_\nu = \delta_{\varphi_\nu} q_\nu - q'_\nu \delta_{\varphi_\nu} t.$$

Si nous substituons ces valeurs dans l'équation (16), elle devient

$$(18)\quad \delta_t\left[\frac{1}{t}\int_0^t (\mathrm{U}-\mathrm{T})\,dt\right] = \sum pq'\frac{\delta_\varphi t}{t} - \sum\frac{p\delta_\varphi q - h\delta k}{t} + \sum\frac{d\mathrm{U}}{dc}\delta c.$$

et si nous posons, d'après (12),

$$t = i_\nu \varphi_\nu,$$

d'où résultent

$$\delta_{\varphi_\nu} t = \varphi_\nu \delta i_\nu$$

et

$$\frac{\delta_{\varphi_\nu} t}{t} = \frac{\delta i_\nu}{i_\nu} = \delta \log i_\nu,$$

nous obtiendrons

$$(19)\quad \delta_t\left[\frac{1}{t}\int_0^t (\mathrm{U}-\mathrm{T})\,dt\right] = \sum pq'\,\delta\log i - \sum\frac{p\delta_\varphi q - h\delta k}{t} + \sum\frac{d\mathrm{U}}{dc}\delta c.$$

Dans cette équation, qui est valable pour un temps quelconque, nous allons prendre les valeurs moyennes de tous les termes. La dernière somme, qui est déjà indépendante du temps, n'en éprouvera aucune modification. La valeur moyenne de l'avant-dernière est, par hypothèse, égale à zéro pour des intervalles de temps considérables. Dans les autres termes, nous ne ferons qu'indiquer les valeurs moyennes Nous obtiendrons de cette manière

$$(20)\qquad \overline{\delta_t\left[\frac{1}{t}\int_0^t (\mathrm{U}-\mathrm{T})\,dt\right]} = \sum \overline{pq'}\,\delta\log i + \sum\frac{\overline{d\mathrm{U}}}{dc}\delta c.$$

Examinons de plus près le premier membre de cette équation. L'expression qui y figure entre crochets,

$$\frac{1}{t}\int_0^t (\mathrm{U}-\mathrm{T})\,dt,$$

est la valeur moyenne de la quantité $\mathrm{U}-\mathrm{T}$ pendant l'intervalle de temps compris entre zéro et t, et est par suite une fonction de t qui, à mesure que t croît, s'approche davantage de la valeur constante $\overline{\mathrm{U}}-\overline{\mathrm{T}}$, qui représente la valeur moyenne pour des temps très-considérables. Il ne résulte cependant pas encore de là que la variation de cette fonction indiquée par δ_t doive tendre vers une limite fixe à mesure que le temps croît. Nous avons en effet vu plus haut que, pour une fonction dont les changements ne consistent qu'en oscillations de grandeur constante, la variation indiquée par δ_t peut prendre des valeurs croissant avec le temps. D'après cela, on doit regarder comme possible que, pour une fonction de la nature de celle dont il est ici question, dont les oscillations décroissent de plus en plus à mesure que le temps croît, la variation indiquée par δ_t effectue des oscillations dont la grandeur ne diminue pas à mesure que le temps croît : il ne serait donc pas permis, en général, de remplacer la variation

$$\delta_t\left[\frac{1}{t}\int_0^t (\mathrm{U}-\mathrm{T})\,dt\right]$$

par le signe

$$\delta(\overline{\mathrm{U}}-\overline{\mathrm{T}}),$$

qui représente la variation que l'on obtient en considérant la valeur moyenne $\overline{\mathrm{U}}-\overline{\mathrm{T}}$ comme une quantité indépendante du temps et en prenant la variation de cette quantité.

Mais, dans notre équation (20), n'entre pas la première des deux variations dont il vient d'être question, mais seulement sa *valeur moyenne*. Celle-ci sera constante pour des intervalles de temps considérables, comme on peut s'en apercevoir par ce fait, que le second membre de l'équation renferme une expression qui devient constante pour de tels intervalles. Par suite de ce fait, la différence mentionnée précédemment, et qui était fondée sur la variabilité de la variation,

disparaît, et nous pouvons par suite désigner par le signe $\delta(\overline{\mathrm{U}} - \overline{\mathrm{T}})$ cette *valeur moyenne, devenue constante, de la variation*. L'équation (20) deviendra ainsi

$$\delta(\overline{\mathrm{U}} - \overline{\mathrm{T}}) = \sum \overline{pq'}\,\delta \log i + \sum \frac{\overline{d\mathrm{U}}}{dc}\,\delta c,$$

ce qui est l'équation (II) que nous avions à démontrer.

9. Comme exemple de l'application de cette équation, nous traiterons en détail un cas particulier très-simple.

Soient donnés deux points matériels qui s'attirent suivant une loi quelconque, ou même qui se repoussent à de certaines distances, et qui se meuvent l'un autour de l'autre sous l'influence de cette force.

Comme le centre de gravité du système reste fixe, et que le mouvement des deux points s'effectue dans un plan, nous pourrons déterminer les positions des deux points par deux variables, qui sont leur distance mutuelle r et l'angle θ que la droite qui les unit fait avec une droite fixe. Si m et μ désignent les masses des deux points, leurs distances au centre de gravité commun seront, en effet,

$$\frac{\mu}{m+\mu}\,r \quad \text{et} \quad \frac{m}{m+\mu}\,r.$$

Si, en outre, θ désigne l'angle que la partie de la droite r, qui va du centre de gravité à la masse m, fait avec la direction positive de l'axe des x d'un système de coordonnées rectangulaires choisi dans le plan, les coordonnées rectangulaires des deux points s'exprimeront de la manière suivante :

$$x_1 = \frac{\mu}{m+\mu}\,r\cos\theta, \qquad y_1 = \frac{\mu}{m+\mu}\,r\sin\theta,$$
$$x_2 = -\frac{m}{m+\mu}\,r\cos\theta; \quad y_2 = -\frac{m}{m+\mu}\,r\sin\theta.$$

A l'aide de ces équations, l'expression

$$\mathrm{T} = \frac{m}{2}(x_1'^2 + y_1'^2) + \frac{\mu}{2}(x_2'^2 + y_2'^2)$$

se transforme dans la suivante :

$$(21)\qquad T = \frac{1}{2}\,\frac{m\mu}{m+\mu}\,(r'^2 + r^2\theta'^2).$$

Si l'on substitue maintenant r et θ à la place des variables désignées plus haut, d'une manière générale, par q_1 et q_2, on obtiendra

$$(22)\qquad \begin{cases} p_1 = \dfrac{dT}{dr'} = \dfrac{m\mu}{m+\mu}\,r', \\[2mm] p_2 = \dfrac{dT}{d\theta'} = \dfrac{m\mu}{m+\mu}\,r^2\theta'. \end{cases}$$

De là résulte, en outre, l'équation suivante, dans laquelle les valeurs initiales des quantités r, r', θ et θ' sont représentées par R, R′, Θ, Θ′ :

$$(23)\qquad \sum \frac{p\,\delta q - h\,\delta k}{t} = \frac{m\mu}{m+\mu}\,\frac{r'\delta r - R'\delta R + r^2\theta'\delta\theta - R^2\Theta'\delta\Theta}{t}.$$

Les phases φ_1 et φ_2 seront, en vertu de (12), définies par les équations

$$(24)\qquad t = i_1\varphi_1 = i_2\varphi_2,$$

et il s'agit de savoir si les intervalles de temps i_1 et i_2 qui y entrent peuvent se déterminer de telle sorte que la valeur moyenne de l'expression (23) tende vers zéro à mesure que le temps augmente. Par l'examen superficiel du mouvement considéré, on voit immédiatement quels sont les intervalles de temps qu'on doit choisir pour i_1 et i_2, puisque le mouvement peut se décomposer en deux parties : le rapprochement et l'éloignement alternatifs des deux points, et la rotation de la droite qui les unit, qui peuvent être considérés séparément comme les changements des quantités r et θ.

Le changement de r est périodique, et si nous prenons la durée de sa période pour i_1, la partie relative à r de la fraction qui entre dans (23), c'est-à-dire la fraction

$$\frac{r'\delta r - R'\delta R}{t},$$

dont le numérateur ne varie que d'une manière périodique, remplit évidemment la condition que sa valeur moyenne tend vers zéro quand le temps augmente.

Pour ce qui regarde l'intervalle de temps relatif à θ, il semble naturel d'avoir égard à la durée de révolution de la ligne de jonction, c'est-à-dire au temps pendant lequel l'angle θ croît de 2π. Mais, comme les révolutions successives ne doivent pas en général s'effectuer en des temps égaux, nous désignerons par i_2 la durée moyenne de révolution de la ligne de jonction. Cela étant, nous obtiendrons, pour la vitesse angulaire moyenne $\overline{\theta'}$, l'équation

$$(25) \qquad \overline{\theta'} = \frac{2\pi}{i_2}.$$

En outre, en vertu du théorème que les rayons vecteurs décrivent des aires égales en des temps égaux, nous avons

$$(26) \qquad r^2\theta' = a,$$

a désignant une constante, et, par suite, nous pouvons poser

$$\theta' = a\frac{1}{r^2} \quad \text{et} \quad \overline{\theta'} = a\overline{\frac{1}{r^2}}.$$

En faisant usage des équations précédentes on peut mettre l'équation identique

$$\theta' = \overline{\theta'} + \theta' - \overline{\theta'}$$

sous la forme suivante :

$$\theta' = \frac{2\pi}{i_2} + a\left(\frac{1}{r^2} - \overline{\frac{1}{r^2}}\right);$$

si l'on multiplie par dt, et qu'on intègre entre o et t, on obtient

$$\theta = \Theta + \frac{2\pi}{i_2}t + a\int_0^t\left(\frac{1}{r^2} - \overline{\frac{1}{r^2}}\right)dt,$$

équation qui, à cause de $t = i_2\varphi_2$, se transforme en

$$(27) \qquad \theta = \Theta + 2\pi\varphi_2 + a\int_0^t\left(\frac{1}{r^2} - \overline{\frac{1}{r^2}}\right)dt,$$

Varions maintenant cette expression de ϑ en regardant ς_2 comme constant, nous obtiendrons

$$(28)\qquad \delta_{\varsigma_2}\vartheta = \delta\Theta - \delta_{\varsigma_2}\left[a\int_0^t\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right)dt\right].$$

L'expression

$$a\int_0^t\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right)dt$$

est une fonction de t qui varie périodiquement, et qui a la même durée de période que la quantité r qui y entre, c'est-à-dire i_1. Nous devons donc chercher à remplacer la variation de cette expression, désignée par δ_{ς_2}, par la variation désignée par δ_{ς_1}.

Or, d'après l'équation (17), nous avons, pour une fonction quelconque Z,

$$\delta_{\varsigma_1} Z = \delta_t Z + Z'\delta_{\varsigma_1} t$$

$$\delta_{\varsigma_2} Z = \delta_t Z + Z'\delta_{\varsigma_2} t,$$

d'où résulte

$$\delta_{\varsigma_2} Z = \delta_{\varsigma_1} Z + Z'(\delta_{\varsigma_2} t - \delta_{\varsigma_1} t).$$

Mais comme on a de plus

$$\delta_{\varsigma_1} t = \varsigma_1\delta i_1 = t\frac{\delta i_1}{i_1},$$

$$\delta_{\varsigma_2} t = \varsigma_2\delta i_2 = t\frac{\delta i_2}{i_2},$$

l'équation précédente devient

$$(29)\qquad \delta_{\varsigma_2} Z = \delta_{\varsigma_1} Z + \left(\frac{\delta i_2}{i_2} - \frac{\delta i_1}{i_1}\right)tZ'.$$

Si l'on fait usage de ce mode de transformation sur le dernier terme de l'équation (28), on obtient

$$(30)\qquad \delta_{\varsigma_2}\vartheta = \delta\Theta - \delta_{\varsigma_1}\left[a\int_0^t\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right)dt\right] - \left(\frac{\delta i_2}{i_2} - \frac{\delta i_1}{i_1}\right)ta\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right).$$

Considérons maintenant la partie relative à ϑ de la fraction qui entre

dans l'équation (23), nous pourrons d'abord lui donner une forme plus simple, en posant d'après l'équation (26)

$$\frac{r^2\theta'\delta_\varphi\theta - R^2\Theta'\delta\Theta}{t} = \frac{a(\delta_\varphi\theta - \delta\Theta)}{t}.$$

Si nous introduisons ici l'expression précédente de $\delta_\varphi\theta$, nous aurons

$$(31)\quad \frac{r^2\theta'\delta_\varphi\theta - R^2\Theta'\delta\Theta}{t} = \frac{a}{t}\,\delta_\varphi\left[a\int_0^t\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{\overline{r^2}}\right)dt\right] + a^2\left(\frac{\delta i_2}{i_2}-\frac{\delta i}{i_1}\right)\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{\overline{r^2}}\right).$$

Le premier terme du second membre de cette expression effectue des oscillations de plus en plus petites, à mesure que le temps croît, et a par suite pour limite zéro. Le second terme, au contraire, effectue des oscillations toujours également grandes; mais, si l'on prend la *valeur moyenne* de l'expression, le second terme disparaît aussi, puisque la différence $\frac{1}{r^2}-\frac{1}{\overline{r^2}}$ devient alors $\frac{1}{\overline{r^2}}-\frac{1}{\overline{r^2}}$; de sorte que la partie de la fraction relative à θ, tout comme celle qui est relative à r, remplit la condition posée dans notre théorème, que sa valeur moyenne tende vers zéro à mesure que le temps croît.

Cela étant démontré, nous pouvons appliquer l'équation (II) posée dans notre théorème au cas actuel, et nous obtiendrons de cette manière l'équation suivante :

$$(32)\qquad \delta(\overline{U}-\overline{T}) = \frac{m\mu}{m+\mu}\left(\overline{r'^2}\,\delta\log i_1 + \overline{r^2\theta'^2}\,\delta\log i_2\right) + \sum\frac{\overline{dU}}{dc}\,\delta c,$$

qui exprime une relation remarquable entre les intervalles de temps i_1 et i_2 et les valeurs moyennes de l'ergiel et de la force vive.

Si la masse μ est regardée comme très-grande vis-à-vis de m, l'équation précédente se transforme en celle qui s'applique au mouvement d'un point matériel autour d'un centre fixe. J'ai donné cette dernière équation dans un travail publié depuis peu [*], et j'ai ajouté qu'on

[*] *Bulletin de la Soc. royale des sciences de Gœttingue,* du 25 décembre 1872, et *Ann. Math. de Clebsch et Neumann;* t. IV, p. 390.

pouvait déduire de la même manière l'équation correspondante pour deux points qui se meuvent l'un autour de l'autre. Ici, au contraire, cette équation s'est trouvée être un cas particulier d'une équation beaucoup plus générale.

10. On peut donner à l'équation (II) différentes autres formes qui sont à la fois intéressantes au point de vue théorique et commodes dans les applications.

En vertu de l'équation (7), on peut poser

$$(33) \qquad \delta\overline{T} = \frac{1}{2}\sum \delta\overline{pq'}.$$

Si l'on ajoute cette équation à l'équation (II), il vient

$$(\mathrm{III}) \qquad \delta\overline{U} = -\frac{1}{2}\sum \frac{1}{i}\,\delta(\overline{pq'}\,i^2) + \sum \overline{\frac{dU}{dc}}\,\delta c,$$

ou bien, sous une autre forme,

$$(\mathrm{III}_a) \qquad \delta\overline{U} = -\frac{1}{2}\sum \overline{pq'}\,\delta\log(\overline{pq'}\,i^2) + \sum \overline{\frac{dU}{dc}}\,\delta c.$$

Si, de nouveau, l'on ajoute l'équation (33) à celles-ci, et que l'on remplace, en vertu de (3), la somme $\overline{U} + \overline{T}$ par E, on obtient

$$(\mathrm{IV}) \qquad \delta E = \sum \frac{1}{i}\,\delta(\overline{pq'}\,i) + \sum \overline{\frac{dU}{dc}}\,\delta c,$$

qu'on peut aussi écrire

$$(\mathrm{IV}_a) \qquad \delta E = \sum \overline{pq'}\,\delta\log(\overline{pq'}\,i) + \sum \overline{\frac{dU}{dc}}\,\delta c.$$

Je me réserve de donner dans un travail subséquent de nouvelles transformations de ces équations, qui peuvent être obtenues au moyen de mon théorème sur le *viriel*, ainsi que les applications de ces équations à la théorie de la chaleur.

Sur le déplacement fini quelconque d'une figure de forme invariable;

PAR M. CHARLES BRISSE,

Répétiteur à l'École Polytechnique, Agrégé de l'Université.

J'ai démontré, dans un premier Mémoire inséré en 1870 dans ce même Recueil [*], les théorèmes que M. Chasles avait fait connaître en 1843 sur le mouvement infiniment petit d'un solide libre dans l'espace [**]. Je me propose, dans ce second Mémoire, d'établir les théorèmes publiés en 1861 par le même auteur, et relatifs au déplacement fini quelconque d'une figure de forme invariable [***].

I. — PROPRIÉTÉS RELATIVES AU DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS SON PLAN [****].

1. « Ces propriétés se rapportent essentiellement au système de deux figures égales, placées d'une manière quelconque dans leur plan.

» On suppose que les deux figures sont superposables par voie de glissement de l'une sur leur plan commun, et conséquemment qu'elles ne peuvent pas être placées symétriquement.

---

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. XV : Mémoire sur le déplacement des figures.

[**] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XVI : Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace.

[***] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LI et LII : Propriétés relatives au déplacement fini quelconque dans l'espace d'une figure de forme invariable.

[****] Tous les passages guillemetés sont empruntés à M. Chasles.

» Cela étant convenu : *Quelle que soit la position respective des deux figures, il existe toujours un point qui, étant considéré comme appartenant à la première figure, est lui-même son homologue dans la seconde; de sorte qu'il suffit de faire tourner la seconde figure autour de ce point pour la faire coïncider dans toutes ses parties avec la première* [*].

» Nous appellerons indifféremment point central, ou centre de rotation, ce point dans lequel coïncident deux points homologues des deux figures, et autour duquel on peut faire tourner une des figures pour la faire coïncider avec l'autre. »

Ce théorème a été démontré dans notre premier Mémoire.

2. « *Que l'on considère dans les deux figures deux droites homologues* L, L′ *et les droites* AA′, BB′, ..., *qui joignent deux à deux leurs points homologues, droites que nous appellerons des cordes :*

» *Les milieux de ces cordes sont sur une droite* Λ, *qui fait des angles égaux avec les deux droites* L, L′.

» Nous nommerons cette droite Λ la droite milieu relative aux deux droites L, L′. »

Soient P et P′ (*fig.* 1) les pieds des perpendiculaires abaissées du point central O sur deux droites homologues L et L′. La droite L est

Fig. 1.



venue dans sa nouvelle position en restant tangente au cercle OP : donc P′ est la position correspondante de P. Soient M et M′ les posi-

[*] « Quand le déplacement de la figure est infiniment petit, on en conclut que les normales aux trajectoires des différents points d'une figure en mouvement passent toutes à un instant du mouvement par un même point. Et de là résulte une méthode fort simple de déterminer les normales ou les tangentes des courbes décrites dans le mouvement d'une figure de forme invariable. »

tions correspondantes d'un point quelconque. Abaissons les perpendiculaires $O\varpi$ et $O\mu$ sur PP′ et MM′; elles tomberont en leurs milieux. Les deux triangles OPP′, OMM′ sont semblables : donc

$$\frac{O\varpi}{OP} = \frac{O\mu}{OM};$$

mais $O\varpi$ et $O\mu$ font avec OP et OM des angles égaux dans le même sens : donc

$$\text{angle } \varpi O\mu = \text{angle POM},$$

donc les deux triangles $\varpi O\mu$, POM sont semblables, donc l'angle en ϖ est droit, donc PP′ passe par μ. C. Q. F. D.

Les angles μP′M′, μPM sont égaux comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires à ceux des angles égaux $PO\varpi$, $P'O\varpi$.

3. « *La droite milieu relative à deux droites homologues passe par les pieds des perpendiculaires abaissées du point central sur ces droites.* »

C'est ce qui résulte de la démonstration précédente.

4. « *La perpendiculaire menée du point central sur la droite milieu de deux droites homologues* L, L′ *passe par le point de concours de ces deux droites.* »

$O\varpi$ est, dans la *fig.* 1, cette perpendiculaire, et elle passe bien par le point de rencontre de PM et de P′M′, puisque le triangle λPP′ est isoscèle.

5. « *Les cordes* AA′, BB′, ..., *qui joignent deux à deux les points correspondants des deux droites* L, L′, *étant projetées orthogonalement sur la droite milieu* Λ, *ont leurs projections égales entre elles.*

Les triangles semblables déjà considérés donnent

$$MM' = PP' \frac{OM}{OP} \quad \text{ou} \quad PP' = MM' \frac{OP}{OM};$$

or $\frac{OP}{OM}$ est le cosinus de l'angle POM ou de son égal $P\mu M$: donc le théorème est démontré.

6. « *Ces cordes enveloppent une parabole tangente aux deux droites* L, L'; *le foyer de cette courbe est le point central des deux figures, et sa directrice est la droite milieu* Λ *des deux droites* L, L'. »

Pour que ce théorème soit exact, il faut substituer à la directrice la tangente au sommet.

On a un angle droit $O\mu M'$ dont un côté passe toujours par un point fixe et dont le sommet décrit une droite fixe, il faut trouver l'enveloppe de l'autre côté. O et Λ considérés comme foyer et tangente au sommet d'une parabole suffisent pour la déterminer; mais une droite telle que MM' est tangente à cette parabole : donc elle est l'enveloppe cherchée; L et L', côtés d'angles droits, sont des tangentes à la parabole.

7. « *Deux droites homologues quelconques* L, L' *font entre elles un angle de grandeur constante et toujours dans le même sens.*

» *Cet angle est égal à la rotation qu'il faut faire éprouver à l'une des figures autour du point central pour l'amener sur l'autre figure.* »

Cela est évident d'après la *fig.* 1.

8. « *Si, autour de deux points homologues* O, O' *des deux figures, on fait tourner deux droites homologues, leur point d'intersection décrit un cercle qui passe par les deux points* O, O'. »

Deux droites homologues quelconques font entre elles un angle égal à la rotation nécessaire pour amener O en O', et toujours dans le même sens; donc leur point de rencontre décrit un cercle complet, dont une partie capable de la rotation et l'autre de son supplément. Ces segments capables sont décrits sur OO'.

9. « *Par un point quelconque on peut toujours mener un système de deux droites homologues et un seul.* »

Soient λ le point, Λ la droite milieu relative à un système de droites homologues, O le point central; on a vu que Λ était perpendiculaire à $O\lambda$: donc s'il y a des systèmes de droites homologues, leurs droites milieu ont une direction donnée. Mais par λ on ne peut mener que deux droites inclinées sur cette direction de la demi-rotation, et l'on en peut toujours mener deux : donc le théorème est démontré.

10. « *Sur une droite quelconque il existe toujours un système de deux points homologues, et un seul.* »

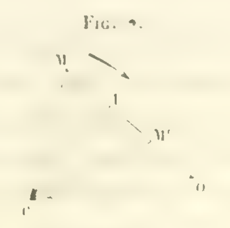
S'il existe sur une droite des systèmes de points homologues, ils ont tous pour milieu le pied de la perpendiculaire abaissée du point central sur cette droite. Mais on ne peut mener que deux droites faisant avec cette perpendiculaire un angle égal à la demi-rotation ; donc le théorème est démontré.

11. « *Les points de la première figure, tels que les cordes qui les joignent à leurs homologues dans la deuxième figure concourent en un même point donné* O, *sont situés sur une circonférence de cercle.*

» *Cette circonférence passe par le point central des deux figures, par le point donné* O *et par le point qui, dans la première figure, correspond à ce point* O *considéré comme appartenant à la seconde figure.* »

Soit C (*fig.* 2) le centre de rotation : par O je mène une droite quelconque OMM', j'abaisse CI perpendiculaire sur cette droite, et je fais

Fig. 2.



avec elle, en tournant en sens inverse de la rotation, un angle égal à cette demi-rotation ; j'obtiens ainsi un point M, et un seul, répondant à la question. L'angle en M est constant et toujours fait dans le même sens ; donc le lieu du point M est un cercle complet passant par C et par O. Soit O' le point correspondant à O dans la première figure : sur la droite OO', il n'existe que le système O, O' de points homologues ; donc O' appartient au cercle.

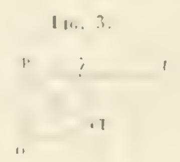
« Réciproquement : *Quand un cercle appartenant à la première figure passe par le point central des deux figures, les droites qui joignent ses points à leurs homologues dans la seconde figure passent toutes par un même point du cercle.* »

En effet, soit M un point du cercle ; la droite qui le joindra à son

correspondant M′ fera avec CM et dans un sens déterminé un angle de grandeur constante; l'arc intercepté sur le cercle à partir de C sera donc aussi constant, et, par suite, toutes les droites telles que MM′ iront concourir en un point fixe O de ce cercle.

12. « *Si, par chaque point d'une droite donnée* L, *on mène deux droites homologues dans les deux figures* (9), *ces droites enveloppent deux paraboles tangentes à la droite* L, *et ayant pour foyer commun le point central des deux figures.* »

J'applique une construction donnée plus haut. Soit λ (*fig.* 3) un point de L; je mène Oλ, et je fais avec Oλ, dans un sens déterminé, un


Fig. 3.

angle λOT égal à la demi-rotation. La droite λT abaissée perpendiculairement sur OT est une des deux droites cherchées. Soit P le pied de la perpendiculaire abaissée sur L, menons PT. Le quadrilatère OPλT est inscriptible; donc λPT est égal à la demi-rotation; donc le lieu du point T est une droite. On est alors ramené à la question d'enveloppe du nº **6**; donc le théorème est démontré.

En prenant toujours la seconde droite homologue, on aurait la seconde parabole.

« Réciproquement : *Quand une parabole a son foyer au point central commun aux deux figures, ses tangentes, considérées comme appartenant à l'une des deux figures, rencontrent leurs homologues en des points situés sur une même droite tangente à la parabole.* »

C'est évident, il suffit de prendre le raisonnement en sens inverse.

13. « *Sur deux droites non homologues menées arbitrairement dans les deux figures, il existe toujours un système de deux points homologues.* »

Soit L une des droites considérée comme appartenant à la première

figure, elle aura pour homologue dans la seconde figure une droite L' qui rencontre la seconde droite donnée D' en un seul point homologue d'un point de L.

14. « *Par deux points non homologues, pris arbitrairement dans les deux figures, on peut toujours mener deux droites homologues.* »

Soit A un point considéré comme appartenant à la première figure, et B' un point considéré comme appartenant à la seconde figure. S'il existe un couple de droites homologues passant par A et par B', celle qui passe par A devra contenir B homologue de B', et celle qui passe par B' devra contenir A' homologue de A : ce ne pourra donc être que AB et A'B'. Ces droites sont d'ailleurs effectivement homologues : donc le théorème est démontré.

15. « *Si l'on divise dans un rapport donné toutes les cordes qui joignent deux à deux les points homologues des deux figures, les points de division forment une troisième figure semblable aux proposées et dans laquelle le point homologue au point central commun à celles-ci est ce point lui-même.* »

Fig. 4.

Soit M (*fig.* 4) un point de la première figure, on sait comment on obtient M'. Soit N un point tel que

$$\frac{\text{MN}}{\text{M'N}} = k$$

en grandeur et en signe : tous les triangles tels que OMM' sont semblables comme isoscèles ayant même angle au sommet : donc l'angle MON est le même pour tous. On ramène donc la figure ainsi formée

à avoir ses points sur les vecteurs correspondants OM par une rotation MON. On a d'ailleurs

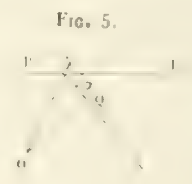
$$\frac{ON}{OM} = \frac{\sin M}{\sin N} = \text{const.};$$

donc les deux figures sont alors semblables et semblablement placées. Pendant la rotation, O qui est à lui-même son homologue reste fixe : donc le théorème est démontré.

16. « *Si l'on fait tourner, d'un même angle et dans le même sens, toutes les droites d'une figure autour des points où ces droites rencontrent leurs homologues dans l'autre figure, ces droites, dans leurs nouvelles positions, formeront une troisième figure, semblable aux proposées, et dans laquelle le point homologue au point central commun à celles-ci coïncidera avec ce point.* »

Soient PL (*fig.* 5) une droite de la première figure, O le centre de rotation, OP la perpendiculaire à PL. On sait qu'on obtient λ, point

Fig. 5.



de rencontre de cette droite avec son homologue, en faisant l'angle POλ égal à la demi-rotation. Je fais tourner PL autour de λ d'un angle α; soit OQ la nouvelle perpendiculaire. L'angle POQ est égal à α, c'est-à-dire constant; donc, par une rotation α de la nouvelle figure autour de O, on amènera toutes les droites à être parallèles à leurs correspondantes, OQ s'appliquant sur OP. Mais

$$OQ = O\lambda \cos(\alpha - \omega),$$
$$OP = O\lambda \cos\omega,$$

d'où

$$\frac{OQ}{OP} = \frac{\cos(\alpha - \omega)}{\cos\omega} = \text{const.};$$

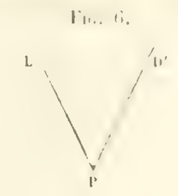
donc les droites correspondantes seront à des distances du point O dans un rapport constant, c'est-à-dire qu'on aura deux figures semblables et semblablement placées. Pendant la rotation, O qui est à lui-même son homologue, reste fixe; donc le théorème est démontré.

17. « *Un point fixe* P *étant donné, les couples de points homologues des deux figures, tels que les cordes qui les joignent deux à deux soient vues de ce point sous un angle de grandeur donnée, sont sur deux coniques qui passent par le point* P;

» *Et ces cordes enveloppent une courbe de la quatrième classe et du sixième ordre, qui a trois tangentes doubles dont une, réelle, est située à l'infini, et les deux autres, imaginaires, sont les asymptotes d'un cercle décrit autour du point central commun aux deux figures.* »

Je fais au point P (*fig.* 6) un angle égal à l'angle donné; soient L et D' les deux côtés de cet angle, et cherchons combien sur L peuvent

Fig. 6.



se trouver de points de la première figure satisfaisant aux conditions données. En se reportant au n° **15**, on sait qu'il n'existe sur deux droites non homologues qu'un système de deux points homologues, ce qui ne fournit sur L qu'un point de la première figure; mais il pourra y avoir sur L des points provenant d'autres angles de sommet P, ce qui arrivera quand la droite L sera telle que le point cherché se trouve en P. Voyons si cela peut arriver, et combien de fois. Si cela arrive, la droite telle que D' passera par l'homologue de P considéré comme appartenant à la première figure; soit P' ce point. Il suffit alors de faire avec PP', dans le sens convenable, l'angle donné, pour que cela arrive, et il est clair que cela n'arrive que pour ce cas : donc une droite quelconque ne rencontre le lieu qu'en deux points; donc c'est une conique, et elle passe par P. On voit de plus qu'elle est tangente

à la droite qui fait avec PP', dans le sens voulu, l'angle donné. On répéterait le même raisonnement pour la seconde figure.

Pour avoir la classe de l'enveloppe des cordes, cherchons combien de ces cordes passent par un point donné O. En se reportant au n° **13**, on sait que les points de la première figure, qui, joints à leurs homologues, passent par un point donné O, sont sur un cercle qui passe par C, par O et par O'; d'après ce qu'on vient de dire, il faut aussi chercher les points sur une conique passant par P. Les points satisfaisant à la question sont donc à l'intersection d'une conique et d'un cercle : donc il y en a quatre, donc il y a quatre tangentes, donc la courbe est de la quatrième classe.

Le cercle dont il est ici question peut se déterminer sans le point O', en disant qu'il passe par C, par O, et qu'il est tangent en C à une droite qui fait avec CO, dans le sens de la rotation, un angle égal au complément de la demi-rotation.

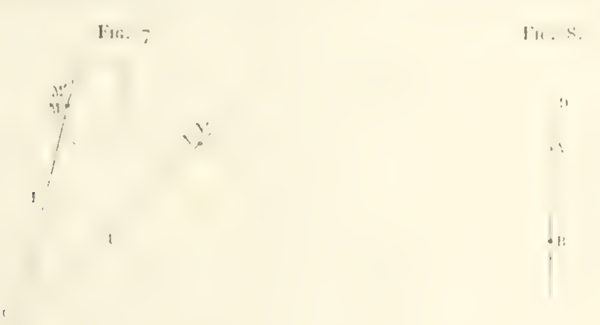
Par C, menons une droite quelconque CO et la tangente au cercle en C; elle ne variera pas quand O s'éloignera indéfiniment, mais alors le cercle se réduira à cette tangente et à la droite de l'infini. Le point O est sur cette droite, qui coupe la conique en deux points, et, pour avoir les tangentes, il faut joindre O à ces deux points, ce qui fournit deux fois la droite de l'infini : donc elle est tangente double. Les deux autres tangentes s'obtiennent en menant des parallèles à CO par les points de rencontre de la seconde droite avec la conique; donc, en général, elles sont simples, à moins que cette seconde droite ne soit tangente à la conique, ce qui arrive deux fois; nous connaissons donc trois tangentes doubles.

Supposons que O soit l'un des points circulaires de l'infini, la droite CO sera l'une des asymptotes du cercle C, et l'on sait que la droite qui fait avec CO un angle donné réel est cette droite elle-même; notre cercle se réduit donc ici à la droite de l'infini et à la droite imaginaire CO; la droite de l'infini fournit, par son intersection avec la conique, la tangente double déjà trouvée; CO coupe la conique en deux points auxquels il faut joindre O pour avoir les tangentes : donc CO est tangente double; on en dirait autant pour le second point circulaire.

Pour avoir le degré de la courbe, cherchons combien il y a de points sur la droite de l'infini, par exemple. Elle est tangente double,

ce qui fait déjà quatre points. Autant il y en a encore, autant la courbe a d'asymptotes qui, différant de la droite à l'infini, sont à distances finies. On sera prévenu qu'on a une asymptote lorsque deux tangentes infiniment voisines de la courbe seront parallèles. Il faut donc chercher quelles sont les droites qui, joignant respectivement deux points infiniment voisins d'une conique à leurs homologues, sont parallèles.

Soient MN, M'N' (*fig.* 7) deux pareilles droites; joignons MM', NN', nous aurons les tangentes homologues aux deux coniques. Les milieux des cordes seront sur la droite milieu de L et L'; mais ces cordes sont parallèles : donc la droite milieu passe par C. C appartient aux deux droites, donc les pieds des perpendiculaires abaissées du centre de rotation sur ces droites se confondent; or ces droites sont distinctes, donc C est le centre de rotation. Il y aura donc autant d'asymptotes que de tangentes par C à la conique, c'est-à-dire deux; donc la courbe est du sixième ordre.


Fig. 7 Fig. 8.

18. « *Une droite* D *étant donnée, les couples de droites homologues des deux figures, qui interceptent sur cette droite des segments de longueur donnée, enveloppent deux paraboles tangentes à la droite* D;

» *Et les points de concours de ces couples de droites homologues sont sur une courbe du troisième ordre, qui a un point double situé au point central commun aux deux figures.* »

Soit AB' (*fig.* 8) l'un des segments de longueur donnée, et cherchons combien de droites satisfaisant à la question passent par A, ce qui fournira la classe de la courbe enveloppe. En se reportant au n° 14, on voit qu'il ne passe par A et B' qu'un seul système de droites homo-

logues. Déplaçons le segment, et voyons si d'autres droites de la première figure passent par A. Puisqu'elles passent déjà par un autre point de D, elles ne pourront passer par A qu'en étant D elle-même. Cela arrivera autant de fois que l'homologue de B' pourra se trouver sur D; mais sur une droite il n'existe qu'un couple de points homologues : donc cela n'arrivera qu'une fois; donc par A ne passent que deux tangentes, donc l'enveloppe des droites de la première figure est une conique.

Prenons le point à l'infini sur D : B' sera aussi à l'infini, son homologue B également; donc la conique est tangente à la droite de l'infini, donc c'est une parabole.

On en dirait autant pour B'.

Je cherche combien il peut y avoir de points de concours de droites homologues sur une droite issue de C. On sait que ces droites font avec celles-ci des angles complémentaires de la demi-rotation; menons deux pareilles droites au point C (*fig.* 9), et inscrivons dans l'angle

Fig. 9.



obtenu une parallèle à D, de longueur égale au segment donné. Il suffit de faire glisser, jusqu'à ce que ce segment soit sur D, pour avoir un des points cherchés. Or on passera par une position et une seule; il n'y a donc qu'un seul point, plus ceux qui, appartenant à d'autres droites, pourraient se trouver sur L, ce qui ne pourrait arriver qu'autant que ces points coïncideraient avec le point C. Or, sur la droite donnée décrivons un segment capable de la rotation, faisons-le glisser sur D, et voyons combien de fois il passera par C : il y passera deux fois; donc C est point double, et la courbe est du troisième ordre.

Propriétés relatives à deux courbes géométriques égales.

19. « *Quand deux courbes égales d'ordre m sont placées d'une manière quelconque dans un plan :*

» *Les droites qui joignent deux à deux les points homologues de ces courbes enveloppent une courbe de la classe de* $2m$, *et de l'ordre* $m(m+1)$;

» *Cette courbe a trois tangentes multiples de l'ordre m, dont une, réelle, est à l'infini, et les deux autres, imaginaires, sont les asymptotes d'un cercle qui aurait son centre au point central commun aux deux figures égales auxquelles appartiennent les deux courbes d'ordre m.* »

Pour avoir la classe de l'enveloppe des cordes, cherchons combien de ces cordes passent par un point donné O. En se reportant au nº **15**, on sait que les points de la première figure qui, joints à leurs homologues, passent par un point donné O, sont sur un cercle qui passe par C, par O et par O'. Les points satisfaisant à la question sont donc à l'intersection de la courbe d'ordre m et d'un cercle : donc la courbe est de la classe $2m$.

Le cercle dont il est ici question peut se déterminer sans le point O', en disant qu'il passe par C, par O, et qu'il est tangent en C à une droite qui fait avec CO, dans le sens de la rotation, un angle égal au complément de la demi-rotation.

Par C, menons une droite quelconque CO et la tangente au cercle en C; elle ne variera pas quand O s'éloignera indéfiniment, mais alors le cercle se réduira à cette tangente et à la droite de l'infini. Le point O est sur cette droite, qui coupe la courbe en m points, et, pour avoir les tangentes, il faut joindre O à ces m points, ce qui fournit m fois la droite de l'infini : donc elle est tangente multiple d'ordre m. Les m autres tangentes s'obtiennent en menant des parallèles à CO par les points de rencontre de la seconde droite avec la courbe; donc en général elles sont simples, à moins que cette seconde droite ne soit tangente à la courbe, ce qui arrivera $m(m-1)$ fois, et fournira en général autant de tangentes doubles.

Supposons que O soit l'un des points circulaires de l'infini, la droite CO sera l'une des asymptotes du cercle C, et l'on sait que la droite qui fait avec CO un angle donné réel, est cette droite elle-même. Notre cercle se réduit donc ici à la droite de l'infini et à la droite imaginaire CO; la droite de l'infini fournit, par son intersection avec la courbe, la tangente multiple déjà trouvée, CO coupe la courbe en m points auxquels il faut joindre O pour avoir les tangentes, donc CO est tangente multiple d'ordre m : on en dirait autant pour le second point circulaire.

Pour avoir le degré de la courbe, cherchons combien il y a de points sur la droite de l'infini, par exemple. Elle est tangente multiple d'ordre m, ce qui fait déjà $2m$ points. Autant il y en a encore, autant la courbe a d'asymptotes qui, différant de la droite de l'infini, sont à distance finie. On sera prévenu qu'on a une asymptote lorsque deux tangentes viendront se réunir en une seule. Menons donc par chacun des points de la droite de l'infini toutes les tangentes à la courbe enveloppe, et comptons celles qui se confondent. Pour que cela arrive, nous avons vu qu'il fallait que la droite associée avec CO devînt tangente; or elle le devient $m(m-1)$ fois : la courbe est donc de degré

$$2m + m(m-1) = m^2 + m = m(m+1).$$

20. « *Quand deux courbes égales, de la classe n, sont placées d'une manière quelconque dans leur plan :*

» *Les points d'intersection des tangentes homologues des deux courbes sont sur une courbe d'ordre $2n$ et de la classe $n(n+1)$;*

» *Cette courbe a trois points multiples d'ordre n, dont un, réel, est au point central des deux figures, et les deux autres, imaginaires, sont à l'infini sur un cercle.* »

Ce théorème est corrélatif du précédent, mais on peut le démontrer directement.

Cherchons combien il y a de points du lieu sur L. Un pareil point étant trouvé, la tangente à la parabole du n° **12** devra être une tangente à la courbe donnée ; quand cela arrivera, le point d'ailleurs sera bien un point du lieu : donc il y aura autant de points du lieu que de tangentes communes à la parabole de classe 2 et à la courbe de classe n, c'est-à-dire $2n$.

On sait que deux droites homologues font entre elles un angle égal à la rotation; faisons donc pivoter cet angle autour du point C : autant de fois le côté correspondant à la première figure sera tangent à la courbe, autant d'unités il y aura dans le degré de multiplicité du point C. Or la courbe donnée est de la classe n: donc cela arrivera n fois, donc C est multiple d'ordre n.

Prenons un des points circulaires de l'infini, et faisons pivoter autour de ce point un angle égal à la rotation; on sait que les côtés de cet angle se confondent, et que tout revient à faire pivoter une droite imaginaire; on amènera donc cette droite à être n fois tangente à la courbe donnée : donc le point est multiple d'ordre n. On en dirait autant pour le second point circulaire.

Pour avoir la classe de la courbe, cherchons combien par ce point C on peut mener de tangentes à la courbe. Ce point, étant multiple d'ordre n, a n tangentes qui comptent chacune pour deux, ce qui fait $2n$ tangentes.

Pour qu'une droite issue de C soit tangente, il faut qu'elle renferme deux points infiniment voisins. Or, quand un point du lieu est sur une droite issue de C, les deux droites homologues qui le fournissent sont également inclinées d'un angle connu sur ce vecteur; il faut donc que deux parallèles infiniment voisines de celles-là, menées par le point consécutif du vecteur, soient aussi des tangentes à la courbe : la courbe doit donc avoir deux tangentes infiniment voisines qui soient parallèles. Or, quand cela arrive, la tangente dont il s'agit est une asymptote : il y aura donc autant de tangentes issues de C que d'asymptotes; mais il y a autant d'asymptotes qu'il y a de points dans lesquels la courbe puisse être coupée par une droite, c'est-à-dire $n(n-1)$: donc la courbe est de classe

$$2n + n(n-1) = n^2 + n = n(n+1).$$

21. « *Étant donnée dans le plan de deux figures égales une courbe d'ordre m, si par chaque point de cette courbe on mène les deux droites homologues des deux figures qui se coupent en ce point* (**9**), *ces deux droites enveloppent deux courbes de la classe $2m$ et de l'ordre $m(m+1)$;*

» *Chacune de ces courbes a trois tangentes multiples d'ordre m,*

dont une, réelle, est à l'infini, et les deux autres, imaginaires, sont les asymptotes d'un cercle ayant son centre au point central des deux figures. »

Considérons la courbe d'ordre m comme appartenant à la première figure, et soit λ (*fig.* 10) un de ses points; faisons-la tourner de manière à l'amener dans la seconde figure, et soit λ' ce que devient λ; je mène $\lambda\lambda'$.

Par λ menons les deux droites homologues des deux figures; on sait qu'elles font avec $O\lambda$ des angles égaux au complément de la demi-rotation; donc l'une est $\lambda\lambda'$ et l'autre est symétrique par rapport à $O\lambda$. Relativement à $\lambda\lambda'$, il n'y a qu'à se reporter au n° **19**, et le théorème est démontré; relativement à l'autre droite, il n'y a qu'à faire usage du n° **16**, et l'on retombe sur le n° **19**.



22. « *Étant donnée dans le plan de deux figures égales une courbe de la classe n, sur chaque tangente à cette courbe se trouvent deux points homologues des deux figures* (**10**) :

» *Ces deux points ont pour lieu géométrique deux courbes égales d'ordre* $2n$ *et de la classe* $n(n+1)$;

» *Chacune de ces courbes a trois points multiples d'ordre n, dont un, réel, est le point central commun aux deux figures, et les deux autres, imaginaires, sont à l'infini sur un cercle.* »

Considérons la courbe de classe n comme appartenant à la première figure, et soit L (*fig.* 11) une de ses tangentes. Abaissons la perpendiculaire OP, et (**10**) faisons de part et d'autre des angles égaux à la demi-rotation; nous aurons les points homologues. Faisons tourner la courbe de manière qu'elle fasse partie de la seconde figure, L occupera la position L' et passera par M'; donc M' est l'intersection

des tangentes homologues des deux courbes, donc on est dans le cas du n° **20**. Le lieu des points M n'est autre que celui des points M', qui a tourné d'un angle égal à la rotation, mais en sens inverse : donc le théorème est démontré.

23. « Si, dans les deux théorèmes **19** et **20**, on suppose que les deux courbes données soient infiniment voisines, comme il arrive quand une courbe éprouve un déplacement infiniment petit (lequel est toujours une rotation autour d'un point fixe), les deux théorèmes prennent les énoncés suivants :

» *Quand le sommet d'un angle droit, dont un côté tourne autour d'un point fixe, glisse sur une courbe d'ordre* m, *l'autre côté enveloppe une courbe de la classe* $2m$ *et de l'ordre* $m(m+1)$;

» *Cette courbe a trois tangentes multiples d'ordre* m, *dont une, réelle, est à l'infini, et les deux autres, imaginaires, sont les asymptotes d'un cercle qui aurait son centre au point fixe.* »

En effet, les droites qui joignaient les points homologues deviennent des perpendiculaires aux vecteurs.

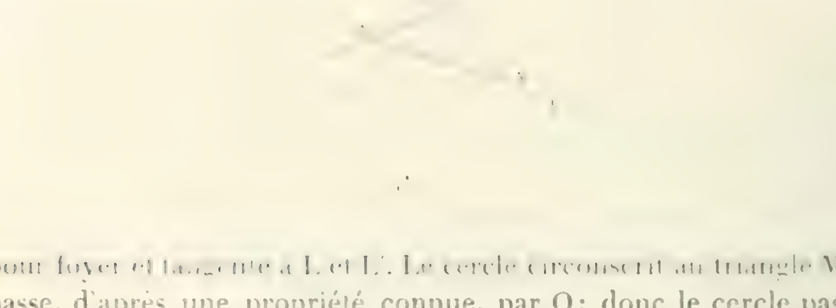
24. « *Le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les tangentes d'une courbe de la classe* n *est une courbe d'ordre* $2n$ *et de la classe* $n(n+1)$;

» *Cette courbe a trois points multiples d'ordre* n, *dont un, réel, est le point fixe autour duquel tourne le premier côté de l'angle, et les deux autres, imaginaires, sont à l'infini sur un cercle.* »

En effet, la droite qui joint le point fixe au point de rencontre de deux tangentes homologues est bissectrice de leur angle : elle devient donc la perpendiculaire.

25. « *Étant données deux courbes égales de la classe* n, *si par chaque couple de points homologues de ces deux courbes on mène un cercle passant par le point central* O *commun aux deux figures que ces courbes représentent, tous les cercles ainsi déterminés auront pour enveloppe une courbe d'ordre* $2n$ *et de la classe* $n(n+1)$; *cette courbe a trois points multiples d'ordre* n, *dont un, réel, situé au point* O, *et les deux autres, imaginaires, situés à l'infini sur un cercle.* »

Soient L et L' (*fig.* 12) deux tangentes homologues, M, M' leurs points de contact; on sait que MM' est tangente à une parabole ayant O



pour foyer et tangente à L et L'. Le cercle circonscrit au triangle MλM' passe, d'après une propriété connue, par O: donc le cercle passant par M, M' et O passe par λ. Les deux points suivants des courbes de la classe *n* seront sur L et L', qui sont les tangentes, et le cercle passant par ces points et O passera par λ; donc λ est le point de rencontre du cercle avec sa position infiniment voisine, c'est-à-dire un point de l'enveloppe: on est donc ramené au n° **20**.

26. « Si l'on suppose que les deux courbes soient infiniment voisines, le théorème prend cet énoncé :

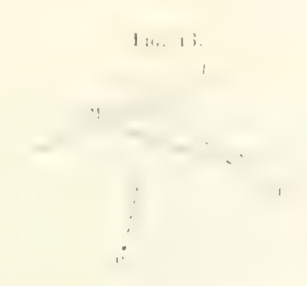
Si les rayons vecteurs menés d'un point fixe O à tous les points d'une courbe de la classe n sont pris pour diamètres d'autant de cercles, la courbe enveloppe de ces cercles est une courbe d'ordre 2n et de la classe n(n + 1), qui a trois points multiples d'ordre n, dont un, réel, est le point O, et les deux autres, imaginaires, sont à l'infini sur un cercle. »

En effet, M et M' sont infiniment voisins, et MM' est perpendiculaire sur OM. Le cercle décrit par O, M, M' a donc OM pour diamètre.

27. « *Étant données deux courbes égales d'ordre m, si l'on conçoit chaque couple de tangentes homologues des deux courbes, et la parabole tangente à ces deux droites et ayant son foyer au point central* O *commun aux deux figures :*

» *Toutes les paraboles ainsi déterminées auront pour enveloppe une courbe de la classe 2m et de l'ordre m(m + 1); cette courbe a trois tangentes multiples d'ordre m, dont une, réelle, est située à l'infini, et les deux autres, imaginaires, sont les asymptotes d'un cercle ayant son centre en* O. »

Soient L, L' (*fig.* 13) un couple de tangentes homologues, M, M' leurs points de contact. Nous connaissons l'enveloppe de MM'; je cherche



le point de contact de cette droite avec son enveloppe. Sa position infiniment voisine passera par les points infiniment voisins de M et M', et sera tangente à la parabole ayant O pour foyer et L, L' pour tangentes; donc le point de contact de MM' avec son enveloppe est aussi son point de contact avec la parabole. Une parabole infiniment voisine de celle-là sera tangente à la droite infiniment voisine de MM', en un point infiniment voisin du point de contact trouvé; donc la limite du point d'intersection des deux paraboles est le point de contact de la parabole primitive avec MM'; or ce point appartient à l'enveloppe de MM' : on retombe donc sur le n° **19**.

28. « Qu'on suppose les deux courbes infiniment voisines, on en conclura ce théorème :

» *Si d'un point fixe* O *on abaisse une perpendiculaire sur chaque tangente d'une courbe d'ordre m, et que par le pied de la perpendiculaire on mène une parabole qui touche cette tangente en ce point et ait pour foyer le point* O :

» *Toutes les paraboles ainsi menées auront pour enveloppe une courbe de la classe 2m et de l'ordre m(m + 1), qui aura trois tangentes mul-*

tiples d'ordre m, dont une, réelle, est à l'infini, et les deux autres, imaginaires, sont les asymptotes d'un cercle ayant son centre en O. »

En effet, en se reportant au n° **6**, on voit qu'à la condition pour la parabole d'être tangente à MM′ on peut substituer celle d'être tangente à PP′, en appelant P, P′ les pieds des perpendiculaires abaissées de O sur L et L′. Le point de contact est d'ailleurs entre P et P′; or, quand les deux courbes sont infiniment voisines, P et P′ se confondent : donc la parabole passe par P, et elle est tangente en ce point à la droite L.

Composition des rotations et des translations finies, dans un plan.

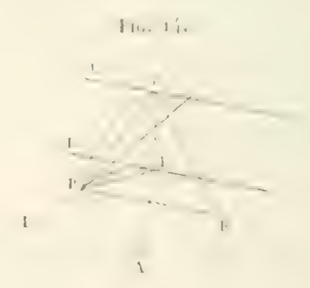
29. « *Une rotation finie autour d'un point* A *peut être remplacée par une autre rotation égale et de même sens, autour d'un autre point quelconque* B, *et par une translation;*

» *Cette translation est égale à deux fois la distance des deux centres de rotation, multipliée par le sinus de la demi-rotation.* »

Il suffit de démontrer la proposition pour une droite à laquelle la figure serait invariablement liée.

Soient L (*fig.* 14) une droite, P le pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur cette droite. Par suite d'une rotation 2ω autour de A,

Fig. 14.



P vient en P′ et L′ fait avec L, dans le sens de la rotation, un angle égal à 2ω.

Faisons tourner L autour de B d'un angle 2ω dans le même sens que tout à l'heure; la nouvelle position L_1, faisant avec L un angle 2ω, sera parallèle à L′, il suffira donc de donner à la droite une translation égale et parallèle à $P'P_1$ pour l'amener en L′.

En faisant tourner PA de $\frac{\pi}{2} - \omega$, on l'amène en PP'; de même PB est amené en PP_1 : donc $P_1PP' = BPA$. On a aussi

$$PP_1 = 2PB\sin\omega, \quad PP' = 2PA\sin\omega,$$

d'où

$$\overline{P_1P'}^2 = 4\sin^2\omega\left(\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 - 2PA \cdot PB\cos BPA\right),$$

$$\overline{P_1P'}^2 = 4\sin^2\omega \cdot \overline{AB}^2,$$

$$P_1P' = 2\sin\omega \cdot AB,$$

ce qu'il fallait démontrer.

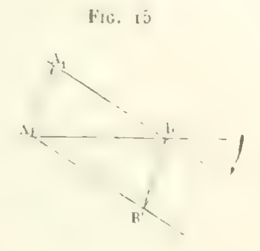
Il est beaucoup plus simple, puisqu'on est libre de choisir la droite, de prendre AB; le théorème est alors évident, et l'on a de suite

$$BB' = 2AB\sin\omega.$$

Réciproquement : *Une rotation autour d'un point et une translation peuvent être remplacées par une rotation unique égale à la rotation proposée et de même sens.* »

Supposons qu'on ait à effectuer une rotation autour du point B (*fig.* 15) et une translation BB'; considérons la droite qui fait avec BB',

Fig. 15



dans le sens de la rotation, un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \omega$, et en B' la droite qui fait avec BB' le même angle; le point A de rencontre de ces deux droites sera le point cherché.

30. « Quand une figure plane éprouve deux rotations successives autour de deux points A, B, nous entendons que la première rotation

lieu autour du point A, qui reste fixe pendant cette rotation, et que la seconde a lieu ensuite autour d'un point B', qui est la position qu'a prise le point B en vertu de la première rotation.

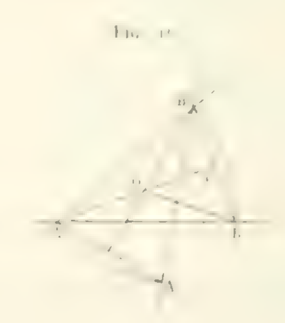
» Cela convenu : *Deux rotations successives d'une figure autour de deux points* A, B *produisent une rotation unique autour d'un point* O.

» *Cette rotation est égale à la somme ou à la différence des deux rotations proposées, selon qu'elles ont lieu dans le même sens ou en sens contraire; et le centre* O *de cette rotation se détermine par cette considération, que les trois points* A, B *et* O *sont les sommets d'un triangle* ABO *dont les angles en* A *et en* B *sont égaux aux demi-rotations proposées, le premier de ces angles étant formé dans le sens de la première rotation et le second en sens contraire à celui de la seconde rotation. Le troisième angle* O *est égal au supplément de la* [*] *rotation résultante. Il suit de là que les trois côtés du triangle sont proportionnels aux sinus des demi-rotations qui ont lieu autour de ses sommets.*

» Il ne faut pas perdre de vue que la première rotation et la rotation résultante ont bien lieu effectivement autour des deux points A et O du triangle, et que la seconde rotation ne se fait pas autour du sommet B, mais bien autour du point B', où ce point B vient se placer par l'effet de la première rotation. »

Considérons une droite AB (*fig.* 16) de la première figure, et voyons

Fig. 16.



ce qu'elle devient. Par l'effet de la première rotation, B vient en B' et A reste fixe; par l'effet de la seconde rotation, que nous sup

[*] Il faut la demi-rotation.

posons de même sens que la première, B′ reste fixe et A vient en A′, de sorte que, en définitive, AB est venu en A′B′. Or on sait qu'on peut amener une droite d'une position à une autre par une seule rotation. Le centre O se détermine en élevant des perpendiculaires AO, B′O à AA′ et BB′ en leurs milieux. Il est bien clair que, ayant d'abord dévié la droite d'un certain angle, puis d'un autre dans le même sens, la déviation totale est la somme des déviations. On peut remarquer aussi que la moitié de la déviation totale au B′OC est égale à la somme des demi-déviations partielles B′AO, AB′O, comme angle extérieur d'un triangle.

Dans le triangle AOB, A est égal à la demi-déviation première et B à la demi-déviation seconde, puisqu'il est égal à AB′O, d'où il résulte que O est le supplément de la demi-rotation résultante, ce qui se voit aussi sur la figure.

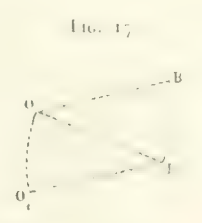
On raisonnerait de même pour les rotations de sens inverse.

31. « Réciproquement : *Une rotation unique peut se remplacer d'une infinité de manières par deux rotations autour de deux points.*

» *L'un de ces points étant donné, l'autre sera pris arbitrairement sur une droite déterminée de position.* »

Supposons qu'on ait à faire une rotation unique, de grandeur déterminée, autour d'un point O (*fig.* 17), et essayons de la remplacer par deux rotations, dont l'une autour d'un point B, par exemple.

Fig. 17.



Dans la rotation autour de O, B vient en B′, et la rotation est alors unique. Revenons à la première position et donnons à la figure une rotation arbitraire autour de B, de même sens que la première, O vient en O_1. Il s'agit maintenant, par une rotation unique, d'amener O_1B en OB′; or on sait que cela est possible, et, pour avoir le centre de ro-

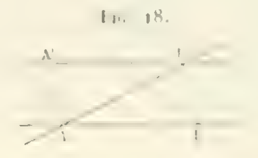
tation, il suffit d'élever des perpendiculaires au milieu des cordes OO, et BB ; mais, B étant donné, BB' l'est aussi, la perpendiculaire aussi : donc, l'un des points étant donné, l'autre est sur une droite déterminée de position.

32. « *Deux rotations égales et de sens contraires produisent une translation.*

» Ces deux rotations forment ce qu'on appelle un *couple de rotations.* »

Soient A et B (*fig.* 18) les deux centres de rotations, et considérons la droite AB; par suite de la première rotation, AB viendra en AB'; par

Fig. 18.



suite de la seconde, AB' viendra en A'B', et comme les deux rotations sont égales, les angles A'B'A, BAB' sont égaux; donc les deux droites sont parallèles, donc on aurait pu amener AB en A'B' par une translation égale et parallèle à BB'.

II. Propriétés relatives a deux figures symétriques placées d'une manière quelconque dans le même plan.

33. « Le système de deux figures égales, mais construites symétriquement et placées d'une manière quelconque dans le même plan, donne lieu à des propriétés très-différentes de toutes celles qui précèdent; ces propriétés méritent d'être connues, quoiqu'on ne les ait point encore étudiées, que nous sachions du moins. D'ailleurs cette question spéciale rentre directement dans la théorie générale du déplacement d'une figure dans l'espace et ne doit point y être omise; car deux figures planes symétriques, situées dans le même plan, deviennent superposables au moyen de deux rotations. Qu'on fasse tourner, en effet, une des deux figures autour d'une droite quelconque du plan

commun, pour la rabattre, par une rotation de 180 degrés, sur le même plan, alors elle est superposable à l'autre figure au moyen d'une seconde rotation autour de leur point central commun.

» Nous ne citons dans ce moment que ce moyen de superposer les deux figures l'une à l'autre, qui est évident; mais nous verrons, en parlant du déplacement d'une figure à trois dimensions, que la superposition peut se faire d'une manière plus générale par deux rotations autour de deux droites, dont l'une est prise arbitrairement dans l'espace. »

Considérons une figure plane comme faisant partie d'un solide invariable, et appliquons cette figure dans son plan en la retournant; un point du corps, qui était d'abord au-dessous du plan, va maintenant se trouver au-dessus. Chacun des points de la figure plane a décrit, d'après ce qui a été démontré dans notre premier Mémoire, des arcs d'hélice dont les cordes sont toutes dans le plan : ces cordes ont donc une projection nulle sur la perpendiculaire au plan; mais la corde d'un point qui n'est pas dans le plan a sur cette droite une projection finie; donc elle n'est pas l'axe du déplacement: il faut donc chercher l'axe dans le plan même. Chacun des points de la figure plane ayant alors décrit des demi-spires, les cordes de ces demi-spires sont toutes divisées en parties égales par l'axe du déplacement. S'il n'y avait qu'une rotation, l'axe et ses points n'auraient pas bougé; mais, comme il y a ensuite un glissement, tous les points sont déplacés, donc :

34. « *Quand deux figures, qui ont été construites symétriquement, sont placées d'une manière quelconque dans le même plan, elles n'ont pas en général de point commun.*

» C'est-à-dire qu'il n'existe pas, comme dans deux figures égales et superposables par voie de glissement de l'une sur le plan commun, un point qui, considéré comme appartenant à la première figure, soit lui-même son homologue dans la seconde figure.

35. » *Si deux figures égales symétriquement ont un point commun, elles sont nécessairement symétriques par rapport à une droite qui passe par ce point.* »

Car, si elles ont un point commun, la corde de ce point est nulle :

donc l'axe du déplacement passe par ce point, et le déplacement n'est qu'une rotation autour de cet axe ; donc cet axe est un axe de symétrie.

56. *Étant données deux figures égales par symétrie, placées d'une manière quelconque dans le même plan :*

1° *Les bissectrices des angles de deux droites homologues quelconques sont parallèles à deux droites fixes.*

Le glissement ne changeant rien au parallélisme, ne considérons que la rotation. L'axe de rotation est alors bissecteur de l'angle de deux droites homologues, et sa perpendiculaire aussi : donc le théorème est démontré.

2° « *Par chaque point d'une figure on peut mener deux droites parallèles à leurs homologues dans l'autre figure ; ces deux droites sont rectangulaires.* »

Négligeons encore le glissement ; les seules droites qui dans la rotation restent parallèles à elles-mêmes sont celles qui sont parallèles ou perpendiculaires à l'axe de rotation, dont le théorème est démontré.

3° « *Les deux figures ont toujours une droite commune, dans le sens de laquelle il suffit de faire glisser une des figures pour la placer symétriquement à l'autre, l'axe de symétrie étant cette droite commune.* »

Cette droite est l'axe du déplacement et, en faisant glisser d'une quantité égale et contraire au demi-pas de l'hélice, on amène les deux figures à être symétriques.

4° *Les cordes qui joignent deux à deux les points homologues des deux figures ont leurs milieux sur la droite commune.*

C'est ce que l'on a démontré plus haut.

5° « *Les projections orthogonales de ces cordes sur cette droite sont égales entre elles.* »

Car elles sont égales au demi-pas de l'hélice.

57. *Une droite L étant prise arbitrairement dans la première figure, il existe toujours un point O autour duquel il suffit de faire tourner la seconde figure pour l'amener dans une position symétrique à*

la première, l'axe de symétrie étant la droite L sur laquelle est venue se placer son homologue L' de la seconde figure. »

En effet, marquons sur L deux points quelconques A et B, et sur L' leurs homologues A' et B'. On sait qu'il existe un point O autour duquel il suffit de faire tourner A'B' pour l'amener en AB, et les deux figures sont alors placées symétriquement.

« Réciproquement : *Un point O étant pris arbitrairement, il existe deux droites homologues L et L' dans les deux figures, telles que, par une rotation de la seconde autour du point O, la droite L' vient se placer sur la droite L, et les deux figures se trouvent dans une position de symétrie par rapport à cette droite.* »

Soient XX' (*fig.* 19) l'axe du déplacement et O le point donné; abaissons la perpendiculaire OP, et prenons de part et d'autre de P des lon-

Fig. 19.



gueurs $P\lambda$, $P\lambda'$ égales au demi-glissement; menons $O\lambda$, $O\lambda'$ et par λ, λ' des perpendiculaires à ces droites : ce seront les droites L et L', comme cela est évident.

38. « Il existe entre la droite L, le point O et la rotation à effectuer autour de ce point, la relation suivante :

» *La distance du point O à la droite L, multipliée par le sinus de la demi-rotation, donne un produit constant qui est égal à la demi-translation dans le sens de la droite commune aux deux figures, qui suffit pour placer l'une des figures symétriquement à l'autre* (**36**, 3°). »

Soit 2ω la rotation, la *fig.* 19 donne

$$O\lambda \sin\omega = \tfrac{1}{2}\lambda\lambda' = \text{const.}$$

39. « Le point O et la rotation à effectuer autour de ce point donnent encore lieu à cette autre relation :

— *La distance du point O à la droite commune aux deux figures, multipliée par la tangente de la demi-rotation, fait un produit égal à la demi-translation dans le sens de la droite commune.* »

On a

$$\frac{\frac{1}{2}\lambda\lambda'}{\mathrm{OP}} = \operatorname{tang}\omega, \quad \text{d'où} \quad \tfrac{1}{2}\lambda\lambda' = \mathrm{OP}\operatorname{tang}\omega.$$

— On peut dire encore que *ce produit est égal à la moitié de la projection orthogonale, sur la droite commune, de la corde qui joint deux points homologues quelconques des deux figures* (**36**, 4°). »

Puisque λ et λ' sont deux points homologues, et que $\lambda\lambda'$ est leur projection.

40. « A chaque droite L correspond un point O, et à chaque point O correspond une droite L (**37**) :

» *Quand les droites* L *passent par un même point, les points* O *sont sur une même droite ; et réciproquement, quand des points* O *sont en ligne droite, les droites* L *passent par un même point.* »

Si des droites L passent par un même point l, leurs homologues L' passent aussi par un même point l' homologue de l ; donc les points O sont sur la perpendiculaire élevée à ll' en son milieu.

Pour démontrer la réciproque, il suffit de prendre deux positions de O sur la droite : on détermine ainsi L et L', L_1 et L'_1 et, par suite, deux points fixes l et l'.

« *En outre, le rapport anharmonique de quatre points est égal à celui des quatre droites.* »

Le rapport anharmonique de quatre points O en ligne droite est égal au rapport anharmonique de quatre points P, et celui-ci au rapport anharmonique de quatre points λ, puisque $\mathrm{P}\lambda$ est une constante. Or ce dernier rapport est celui du faisceau de quatre droites L : donc le théorème est démontré.

41. « Il s'ensuit que : *Des droites* L *quelconques, d'une part, et les*

points O *qui leur correspondent, d'autre part, forment deux figures corrélatives* [*]. »

La propriété précédente est la définition même des figures corrélatives.

« Par conséquent, *si les droites* L *enveloppent une conique, les points* O *sont sur une autre conique; etc., etc.* »

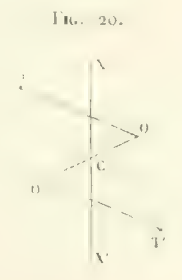
Car, par un point, on ne peut mener que deux tangentes L à la conique, et, par conséquent, sur la droite corrélative du point, il n'y a que deux points O.

42. « *Quand deux figures égales symétriquement sont placées d'une manière quelconque dans le même plan:*

« 1° *Si autour de deux points homologues on fait tourner deux droites homologues, leur point d'intersection décrit une hyperbole équilatère, qui a pour l'une de ses asymptotes la droite commune aux deux figures.* »

Car les droites homologues font entre elles des angles égaux dans le même sens; on a donc deux faisceaux homographiques, qui par l'intersection de leurs rayons correspondants déterminent une conique. On sait que, par un point d'une figure, il passe toujours deux droites parallèles à leurs homologues dans l'autre figure, que ces deux droites sont rectangulaires, et que l'une d'elles est parallèle à la droite com-

Fig. 20.



mune; donc la conique est une hyperbole équilatère ayant pour direction asymptotique la droite commune aux deux figures.

La tangente en O' (*fig.* 20) à la conique est l'homologue de OO'

[*] « Voir *Traité de Géométrie supérieure*, p. 413. »

considérée comme appartenant à la première figure; la tangente en O est l'homologue de OO′ considérée comme appartenant à la seconde figure : ces deux tangentes sont donc parallèles; par suite, OO′ est un diamètre, C le centre et XX′ une asymptote.

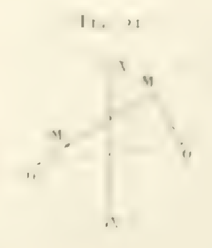
2° *Les cordes, qui joignent deux à deux les points homologues de deux droites homologues, enveloppent une parabole tangente à ces deux droites, et tangente en son sommet à la droite commune aux deux figures.* »

Car ces cordes tracent sur les deux droites des divisions homographiques dont les parties sont respectivement égales. Si L et L′ sont ces deux droites, λ et λ′ les points où elles rencontrent XX′, λ et λ′ sont homologues et la parabole est tangente à la droite commune. La direction limite d'une corde qui joint deux points homologues quand ces points s'éloignent indéfiniment est perpendiculaire à XX′; or cette direction limite est celle de l'axe de la parabole; XX′ est donc une tangente perpendiculaire à l'axe, et, par suite, la tangente au sommet.

43. « *Les points d'une figure, qui sont tels que les droites qui les joignent à leurs homologues passent toutes par un même point pris arbitrairement, sont situés sur une hyperbole équilatère qui passe par ce point, et dont une des asymptotes est la droite commune aux deux figures.* »

Soit M (*fig.* 21) un point de la première figure, M′ son homologue dans la seconde, O′ le point donné, O l'homologue de O′ dans la pre-

Fig. 21.



mière figure; menons OM; le point M est l'intersection des rayons homologues OM, O′M′ : on retombe ainsi sur le paragraphe (42, 1°).

« Et réciproquement, *toute hyperbole équilatère, dont une des asym-*

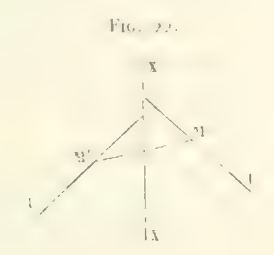
ptotes est la droite commune aux deux figures, jouit de la propriété que les droites qui joignent ses points, considérés comme appartenant à une des deux figures, à leurs homologues dans l'autre figure, passent toutes par un même point de l'hyperbole. »

Soit M (*fig.* 21), un point de l'hyperbole considéré comme appartenant à la première figure; déterminons à l'aide de ce point O et O', et appliquons l'énoncé du paragraphe (42, 1°) à ces deux points, nous obtiendrons une hyperbole équilatère coïncidant avec celle-ci, puisqu'elles satisfont à plus de cinq conditions communes; donc le théorème est démontré.

44. « *Quand des droites d'une figure rencontrent leurs homologues en des points situés sur une droite fixe, prise arbitrairement, ces droites enveloppent une parabole tangente à cette droite, et qui touche en son sommet la droite commune aux deux figures.* »

Soit L′ (*fig.* 22) la droite fixe; considérons-la comme appartenant à la seconde figure, et soit L son homologue dans la première.

Fig. 22.



Soit M′ le point de rencontre de deux droites homologues, considérons-le comme appartenant à la seconde figure : la droite de la première figure passera par M homologue de M′; les deux droites homologues sont donc MM′ et une autre droite passant par M′; cherchons l'enveloppe des droites MM′; on retombe ainsi sur le paragraphe (42, 2°).

« Et réciproquement, *toute parabole tangente en son sommet à la droite commune aux deux figures jouit de la propriété que toutes ses tangentes, considérées comme appartenant à une des deux figures, rencontrent leurs homologues en des points situés sur une même droite qui est une tangente à la parabole.* »

Soit MM′ une des tangentes à cette parabole considérée comme appartenant à la première figure : prenons son homologue dans la seconde figure, nous aurons M′, par suite L′, puis L. Appliquons alors l'énoncé du paragraphe (42, 2°), nous obtiendrons une parabole coïncidant avec celle-ci, puisqu'elles satisfont à plus de quatre conditions communes; donc le théorème est démontré.

45. « Nous ne nous étendrons pas davantage sur les propriétés auxquelles donne lieu le système de deux figures égales symétriquement. On voit qu'elles sont très-différentes, comme nous l'avons annoncé, de celles qui appartiennent à deux figures superposables. Une différence principale provient de ce que les figures symétriques ont toujours, quelle que soit leur position, une droite commune qui n'existe pas dans les figures superposables, tandis que celles-ci ont un point commun qui n'existe pas dans les autres.

» Mais les propriétés géométriques, dans ces deux systèmes, ont une analogie constante. C'est qu'en effet les deux systèmes ne sont que des cas particuliers de deux figures homographiques quelconques. Et même on n'appréciera bien le caractère distinctif des unes et des autres qu'en les comparant au cas général de deux figures homographiques.

» Nous dirons donc :

» *Premièrement, deux figures égales superposables sont deux figures homographiques dont un des trois points communs est réel, et les deux autres sont imaginaires à l'infini, et dont une des trois droites communes est réelle et située à l'infini, et les deux autres sont imaginaires.*

» *Secondement, deux figures égales symétriques sont deux figures homographiques qui n'ont que deux points communs et deux droites communes : un des deux points est à l'infini, et une des deux droites est aussi à l'infini.*

» Pour concevoir deux figures homographiques n'ayant que deux points communs et deux droites communes, il suffit de supposer que des trois points A, B, C communs à deux figures homographiques, en général, le troisième, C par exemple, s'approche indéfiniment du point A, en conservant la direction donnée AC. Quand le point C sera infiniment

voisin du point A, on dira que les deux figures n'ont plus que deux points communs A et B, et deux droites communes AB et AC.

» Il suffit d'exprimer, dans la construction géométrique des deux figures, que les deux divisions homographiques formées par les points homologues situés sur la droite commune AC ont leurs deux points doubles coïncidents en A ; ou bien que les deux faisceaux homographiques formés par les droites homologues des deux figures autour du point commun B ont leurs deux rayons doubles coïncidents suivant BA. »

III. Déplacement d'une ligne droite dans l'espace.

46. « *Quand une droite* L, *sur laquelle sont marqués des points* A, B, C,..., *est transportée en* L′ *dans un autre lieu de l'espace, où ces points ont les positions* A′, B′, C′,... :

» 1° *Les cordes* AA′, BB′,... *sont toutes parallèles à un même plan sur lequel les deux droites* L, L′ *sont également inclinées.* »

Une droite, sur laquelle sont marqués des points, a été déplacée d'une manière arbitraire dans l'espace : ne pourrait-on pas la ramener à sa position première par une simple rotation autour d'un axe convenablement choisi?

Soient A et B deux points de la droite qui viennent respectivement en A′ et B′ : AA′ est la corde d'un arc de cercle, BB′ également, et ces deux arcs de cercle sont dans des plans parallèles.

Les directions de AA′ et BB′ déterminent un plan auquel l'axe de rotation doit être perpendiculaire : il y a donc tout au plus une solution quant à la direction.

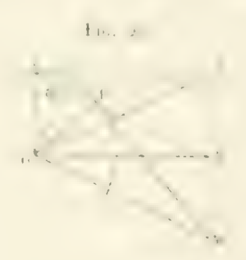
Si l'axe existe, il est dans un plan perpendiculaire à AA′ en son milieu, il est également dans un plan perpendiculaire à BB′ en son milieu; il est donc l'intersection de ces deux plans. On peut encore dire : projetons A, B, A′, B′ sur un plan perpendiculaire à l'axe; puisqu'il n'y a eu qu'une simple rotation, la projection de AB est égale à celle de A′B′ et il suffit de chercher le point central de ces deux projections.

On peut encore faire usage du théorème sur les droites coupées par des plans parallèles.

Il en résulte que toutes les cordes des points homologues sont parallèles à un même plan, et que les deux droites L et L' sont également inclinées sur ce plan.

« 2° *Ces cordes ont leurs milieux a, b, ... sur une même droite* Λ; *cette droite, que nous appellerons droite milieu des deux* L, L', *fait des angles égaux avec celles-ci, et est située dans un plan qui leur est parallèle.* »

Prenons les plus courtes distances des droites L et L' à l'axe, et projetons ces droites sur le plan qui les contient, nous serons dans le cas de la *fig.* 1. Les projections des milieux des cordes sont sur $\varpi\mu$ (*fig.* 23); donc, d'abord, le lieu de ces milieux est dans un plan perpendiculaire au plan de la figure, ϖ est un point du lieu. Soit μ un autre point quelconque, joignons-le à ϖ, et calculons l'inclinaison x; nous aurons



$$\operatorname{tang} x = \frac{z}{\varpi\mu},$$

z étant la hauteur de MM'; mais on a

$$\frac{z}{\mathrm{PM}} = \operatorname{tang}\alpha, \quad \text{d'où} \quad z = \mathrm{PM}\operatorname{tang}\alpha,$$

α étant l'inclinaison de L; d'où

$$\operatorname{tang} x = \frac{\mathrm{PM}}{\varpi\mu}\operatorname{tang}\alpha,$$

et, à cause des triangles semblables OPM, O$\varpi\mu$,

$$\frac{\mathrm{PM}}{\varpi\mu} = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{O}\varpi} = \frac{1}{\cos\omega}.$$

d'où

$$\operatorname{tang} x = \frac{OP}{O\varpi} \operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\cos \omega} = \text{const.};$$

donc le lieu est une droite, et il est clair sur la figure qu'elle fait des angles égaux avec L et L′.

Considérons par L un plan parallèle à L′, et par L′ un plan parallèle à L, et une série de droites comprises entre les deux plans, ces droites auront leurs milieux sur un plan parallèle à L et à L′; donc Λ est dans ce plan.

Au lieu du calcul précédent, on pourrait dire que le lieu, étant l'intersection de deux plans, est une droite.

« 3° *Les projections orthogonales de ces cordes* AA′, BB′,..., *sur la droite* Λ, *sont toutes égales entre elles.* »

Menons par Λ le plan vertical $\varpi\mu$; abaissons du point M une perpendiculaire sur ce plan, et par le pied une perpendiculaire sur Λ, nous aurons projeté Mμ sur Λ. La première opération fournit PP′, et la seconde donne PP′ $\cos x$ ou const.; donc le théorème est démontré.

« 4° *Les plans menés par les milieux des cordes* AA′, BB′,..., *perpendiculairement à ces droites, passent tous par une même droite* λ. »

Ils passent en effet tous par l'axe de rotation.

« 5° *Les trois droites, qui mesurent les plus courtes distances de* λ *à* L, *à* L′ *et à* Λ, *sont situées dans un même plan perpendiculaire à la droite* λ, *et les deux premières rencontrent les deux droites* L, L′, *respectivement, en deux points homologues.* »

Le théorème est évident pour les droites L et L′, et comme l'angle $O\varpi\mu$ est droit, que $O\varpi$ est dans le plan de projection, l'angle dont $O\varpi\mu$ est la projection est également droit.

« 6° *Il suffit de faire tourner la droite* L *autour de* λ *pour l'amener sur* L′, *et faire coïncider les points* A, B, C,... *avec leurs homologues* A′, B′, C′,.... »

C'est ce qui a été établi dès le début.

47. « Par conséquent :

» *Tout déplacement fini quelconque d'une droite dans l'espace*

peut s'effectuer par une simple rotation de la droite autour d'un axe fixe.

48. « Nous appellerons la droite Λ, lieu des milieux des cordes AA', BB',..., droite milieu des deux L, L'.

» Il résulte du théorème 3° que : *Quand une corde AA', qui joint deux points homologues des deux droites* L, L', *est perpendiculaire à la droite milieu* Λ, *toutes les autres cordes* BB',... *sont aussi perpendiculaires à cette droite.* »

Pour que leurs projections puissent être nulles.

IV. Déplacement d'une figure plane dans l'espace.

49. « *Quand deux figures planes égales, dont les points* A, B, C,... *de l'une correspondent aux points* A', B', C',... *de l'autre, sont placées d'une manière quelconque dans l'espace :*

» 1° *Les milieux a, b, c,... des cordes* AA', BB',... *sont situés sur un même plan* Π, *lequel fait des angles égaux avec les plans* P, P' *des deux figures.* »

Considérons trois points A, B, C et leurs homologues A', B', C' des deux figures, qui suffisent pour définir le déplacement. Les points milieux a, b, c déterminent un plan Π. La droite milieu L relative à BC et B'C', passe par b et c et est dans le plan Π ; il en est de même pour M, droite milieu de CA et de C'A' et pour N droite milieu de AB et A'B'. Soit maintenant un point quelconque D du plan P, et son homologue D' du plan P', d le milieu de la corde DD'. Menons par D une droite à travers le triangle ABC, et son homologue par D' à travers A'B'C'; ces deux droites ont une droite milieu qui passe par les milieux des cordes des points où elles rencontrent les côtés des triangles; donc cette droite milieu est dans le plan Π, et, par suite, le point d situé sur cette droite.

Le plan P rencontre Π suivant une droite D, dont l'homologue D' est sur P', la droite milieu de D et D' est sur Π et sur un plan parallèle à D et D'; donc D est dans un plan parallèle à Π; donc elle est l'intersection de Π et de P'. Soient A et B deux points de D, A' et B' leurs

homologues sur D', C et C' deux autres points homologues de P et P'; II étant le plan milieu, C et C' sont de part et d'autre à égale distance de II. On a donc deux triangles ABC, A'B'C' égaux, ayant leurs bases dans un même plan, et leurs sommets à la même distance de ce plan; donc ils ont dû tourner d'angles égaux avec II, pour arriver à cette position.

» 2° *Les plans perpendiculaires à ces cordes, menés par leurs milieux, passent tous par un même point du plan* II. »

Soient A, B, C (*fig.* 24) trois points, et A', B', C' leurs homologues. J'appelle α le plan perpendiculaire à AA' en son milieu, β et γ les deux autres. Soient D un quatrième point, D' son homologue : je mène par D une droite à travers le triangle ABC, et par D' son homologue à travers A'B'C'. Les plans correspondant à m, n, D se coupent suivant une même droite. Le plan correspondant à m passe par l'intersection de α et β; celui correspondant à n passe par l'intersection de α et γ; donc l'intersection des plans m et n passe par le point commun à α, β, γ. Or le plan D contient cette intersection; donc il passe aussi par α, β, γ.

Fig. 24. Fig. 25.



Soient D et D' (*fig.* 25) les intersections de P et P' avec II; en se reportant au déplacement d'une figure plane dans son plan, on voit que la droite milieu fait des angles égaux avec D et D', et passe par les pieds des perpendiculaires abaissées du point central sur ces droites. Si P et P' faisaient des angles égaux avec II dans le même sens, ils se rencontreraient sur la verticale de O en deux points homologues, et II ne serait plus le plan milieu; donc ils sont inclinés en sens inverse. Mais alors en O se projettent deux points homologues dont O est le milieu : cette corde est donc verticale, et II passe par le point de rencontre de α, β, γ

En se reportant au théorème (46, 3°), on voit que le point O est le point cherché.

« 3° *Ce point se distingue de tous les autres, en ce que la corde dont il est le milieu est perpendiculaire au plan* Π.

» Nous appellerons ce plan Π plan milieu des deux plans P, P', et le point unique en question foyer de ce plan milieu.

50. » Le plan Π rencontre les deux plans P, P' suivant deux droites L, L' :

» 1° *Ces droites sont homologues dans les deux figures que l'on considère dans ces plans;*

» 2° *La droite milieu* Λ *de ces deux droites est située dans le plan* Π;

» 3° *Les plans menés par les milieux des cordes qui joignent les points homologues des deux droites, perpendiculairement à ces cordes, passent par une même droite* λ;

» 4° *Cette droite est la corde qui joint deux points homologues des deux figures, et dont le milieu se trouve au foyer du plan* Π (**49**, 3°);

» 5° *On amènera la droite* L *sur la droite* L' *par une rotation autour de cette droite* λ; *puis, en faisant tourner le plan* P *autour de la droite* L, *on fera coïncider les deux figures l'une sur l'autre.*

51. » Par conséquent :

» *Tout déplacement d'une figure plane dans l'espace peut s'effectuer au moyen de deux rotations successives autour de deux droites rectangulaires, dont l'une est inclinée sur le plan de la figure, et l'autre est située dans ce plan; la première de ces droites, perpendiculaire au plan milieu relatif aux deux positions du plan de la figure, est menée par le foyer de ce plan, et la dernière est la trace, sur ce plan milieu, du plan de la figure dans sa première position.*

» Il est clair que les deux rotations peuvent être simultanées, c'est-à-dire que, pendant que la trace L du plan de la figure sur le plan milieu tourne autour de la première droite fixe, ou simplement autour du foyer de ce plan milieu, le plan de la figure peut tourner autour de cette droite mobile L.

52. « Le déplacement d'une figure plane dans l'espace peut se faire d'une autre manière, par deux rotations autour de deux droites rectangulaires, ainsi qu'il suit :

» Appelons D′ la droite d'intersection des deux plans P, P′, et considérons cette droite comme appartenant à la seconde figure ; soit D son homologue dans la première figure : cette droite D est située dans le premier plan, de sorte que ce plan contient deux droites homologues D, D′, relatives aux deux figures, respectivement. On fera coïncider ces deux droites au moyen d'une rotation autour d'une droite fixe, perpendiculaire au plan ; puis, par une rotation autour de la droite D, on fera coïncider les deux plans eux-mêmes, c'est-à-dire les deux figures. Par conséquent :

» *Tout déplacement d'une figure plane dans l'espace peut s'effectuer au moyen de deux rotations successives, la première autour d'une certaine droite perpendiculaire au plan de la figure, et la seconde autour d'une seconde droite située dans ce plan lui-même.*

» Les deux rotations peuvent être simultanées comme ci-dessus : on concevra que le plan de la figure tourne sur lui-même autour de la droite fixe qui lui est perpendiculaire, et que la figure, se détachant de son plan, tourne autour de la seconde droite, pendant que cette droite tourne elle-même autour de la première.

» Nous verrons, en parlant du déplacement d'un corps quelconque, qu'il y a beaucoup d'autres systèmes de deux rotations autour de deux droites, dont l'une peut être prise arbitrairement, par lesquels se peut effectuer le déplacement d'une figure plane dans l'espace.

53. « *La droite d'intersection des plans* P, P′ *de deux figures égales est une corde, c'est-à-dire que sur cette droite se trouvent deux points homologues des deux figures.* »

Ramenons, en effet, P′ sur P par une rotation autour de la droite d'intersection : les points homologues qui pouvaient se trouver sur cette droite s'y trouvent encore ; mais on sait (**10**) que sur une droite quelconque il existe toujours un système de points homologues et un seul : donc le théorème est démontré.

54. « La droite D′, intersection des deux plans P, P′, étant consi-

dérée comme appartenant à la première figure, il lui correspond, dans le plan P', une droite D'', qui est son homologue dans la deuxième figure.

» Un point a' de la droite D' étant considéré comme appartenant à la deuxième figure, il lui correspond dans la première un point a situé sur la droite D; et au même point a', considéré comme appartenant à la première figure, correspond, dans la deuxième, un point a'' situé sur la droite D''.

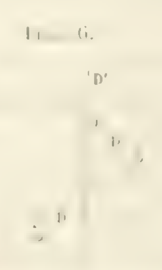
» Si l'on considère la droite aa' comme appartenant à la première figure, la droite qui lui correspond dans la deuxième figure est la droite $a'a''$.

» Ainsi, *par chaque point a' de la droite d'intersection* D' *des deux plans* P, P', *on peut mener dans ces plans respectivement deux droites homologues $a'a$ et $a'a''$.*

55. » *Ces deux droites enveloppent deux paraboles qui font partie respectivement de deux figures égales contenues dans les plans* P, P'; *et les points de contact des deux droites sur ces courbes sont deux points homologues.* »

Ces cordes, étant homologues, enveloppent des courbes égales, et leurs points de contact sont homologues; les courbes enveloppes sont des paraboles en vertu du théorème (6).

« *Les deux paraboles sont tangentes à la droite* D' *en deux points différents qui limitent la corde située sur cette droite* (55). »



D'après le théorème (6), les deux paraboles sont tangentes à D (*fig.* 26). Or à D', tangente de la première figure, correspond D'',

tangente de la seconde; et à D′, tangente de la seconde, correspond D, tangente de la première. Considérons a comme appartenant à la première D, son homologue sera sur D′; considérons a' comme appartenant à la seconde D″, son homologue sera sur D′. Mais il n'existe (55) qu'un système de points homologues sur D′; donc à a correspond a', et à a' correspond a, d'où il résulte que $a\alpha = aa' = a'\beta$. En un mot, a de la première a pour homologue a' de la seconde, α de la première a de la seconde, a' de la seconde a de la première, et β de la seconde a' de la première.

56. « *Le plan de deux droites $a'a$, $a'a''$, tangentes à ces deux paraboles, enveloppe une surface développable du quatrième ordre, dont la génératrice est la droite qui joint les points de contact des droites $a'a$, $a'a''$ avec les deux paraboles, respectivement.* »

Le plan des droites $a'a$, $a'a''$ enveloppe une surface développable, puisqu'il passe d'une position à une autre d'une manière parfaitement définie. Prenons l'intersection de deux positions infiniment voisines du plan, nous aurons une génératrice. Or il suffit, pour cela, de prendre les intersections des traces des deux positions du plan sur les plans des deux figures, et de les joindre. Mais ces intersections sont les points de rencontre de tangentes infiniment voisines à chacune des paraboles; on a donc pour génératrice la droite qui joint les points de contact.

Pour avoir l'ordre de la surface, je cherche l'ordre de la courbe d'intersection par le plan milieu. Soient L une droite du premier plan, L′ son homologue dans le second, Λ leur droite milieu; la droite L coupe la parabole en deux points, L′ aussi; donc sur Λ existent deux points de l'intersection, plus ceux qui pourraient provenir de droites joignant des points homologues n'appartenant ni à L ni à L′. Soient m, m' deux pareils points, a et a' deux des quatre points d'intersection des paraboles par L et L′. Considérons les droites am, $a'm'$, elles auront même droite milieu que L et L′; am coupe D en un point d, et $a'm'$ coupe D′ en un point d', qui sont homologues : le milieu de dd' est sur $\lambda\lambda'$, il doit être aussi sur Λ : donc il doit être au point de rencontre de $\lambda\lambda'$ avec Λ; mais les cordes telles que dd' enveloppent une parabole à laquelle on peut mener deux tangentes par le point de rencontre de $\lambda\lambda'$

avec A; l'une de ces tangentes fournit les droites L et L', et l'autre la droite cherchée. Chaque point de rencontre de L avec la parabole fournit donc deux points sur A; donc il y a en tout quatre points sur A, donc la surface est du quatrième ordre.

La question revient d'ailleurs au fond à la suivante : On donne deux droites L et L', leur droite milieu A et trois points a, a', α correspondants sur ces trois droites. Combien par a passe-t-il de droites ayant même droite milieu que L et L'? Une.

57. « *Cette développable jouit des propriétés suivantes :*

» 1° *Par un point quelconque de l'espace, on ne peut lui mener que trois plans tangents;*

» 2° *Son arête de rebroussement est une courbe à double courbure du troisième ordre;*

» 3° *Chacune des cordes qui joignent les points du plan* P *à leurs homologues du plan* P' *est la droite d'intersection de deux plans tangents à la développable;*

» Et réciproquement, *la droite d'intersection de deux plans tangents quelconques à la développable est une corde qui joint deux points homologues des deux plans;*

» 4° *Par un point de l'espace il ne passe que trois de ces cordes; deux peuvent être imaginaires, la troisième est toujours réelle.* »

Dans le déplacement qu'a subi P pour arriver en P', si l'on cherche les points dont les trajectoires ont pour cordes des droites passant par un point M, on sait qu'on trouve ces points sur une courbe à double courbure du troisième ordre. Cette courbe ne coupe P qu'en trois points, dont deux peuvent être imaginaires. Donc, par un point M de l'espace, il ne passe que trois cordes joignant des points du plan P à leurs homologues du plan P', et l'une d'elles est toujours réelle.

Soient p et p' deux points homologues des plans P et P'; par ces deux points, on peut mener aux deux paraboles homologues quatre tangentes homologues respectivement. Le plan des deux premières tangentes est tangent à la surface développable, le plan des deux autres également; donc la droite pp' est l'intersection de deux plans tangents à la développable.

Considérons deux plans tangents à la développable; le premier aura

pour traces sur P et P′ deux tangentes homologues en des points homologues, le second également; donc les points d'intersection des tangentes sur P et P′ déterminés par des constructions homologues seront homologues, donc la droite d'intersection des deux plans tangents est une corde qui joint deux points homologues des deux plans.

Cherchons à mener à la développable des plans tangents par un point quelconque M; les intersections de ces plans entre eux donneront des droites telles que pp'; or, par un point M, il n'en passe que trois : donc il y a au plus trois plans tangents; d'ailleurs ils existent en vertu de la réciproque du 3°.

J'ajouterai que ces deux plans tangents peuvent devenir imaginaires, quand deux des droites le deviennent; il n'y a de réel que le plan qui renferme les deux droites imaginaires conjuguées.

On aurait encore pu dire : Considérons un plan tangent quelconque; il coupe suivant une courbe du quatrième ordre qui renferme déjà la double droite de contact : le reste est donc une conique. Soit M un point quelconque du plan : les plans tangents à la surface qu'on pourra mener par M auront pour traces sur le plan donné des tangentes à la conique; donc il y en a au plus deux. D'ailleurs ils existent, car, la conique étant sur la surface, il passe par chacun de ses points une génératrice de la surface qui détermine le plan tangent. Si le point M est à l'intérieur de la conique, les deux plans tangents sont imaginaires.

58. « *Quand les deux figures situées d'une manière quelconque dans l'espace sont deux courbes égales d'ordre m, les droites qui joignent deux à deux leurs points homologues forment une surface réglée de l'ordre 2m.* »

Pour avoir l'ordre de la surface, je cherche l'ordre de la courbe d'intersection par le plan milieu. Soient L une droite du premier plan, L′ son homologue dans le second, Λ leur droite milieu; la droite L coupe la courbe en m points, L′ aussi; donc, sur Λ, existent m points de l'intersection, plus ceux qui pourraient provenir de droites joignant des points homologues n'appartenant ni à L ni à L′. Soient m, m' deux pareils points, a et a' deux des $2m$ points d'intersection des courbes par L et L′; considérons les droites am, $a'm'$, elles auront même droite milieu que L et L′; am coupe D en un point d, et $a'm'$ coupe D′ en un

point d', qui sont homologues; le milieu de dd' est sur $\lambda\lambda'$, il doit être aussi sur Λ : donc il doit être au point de rencontre de $\lambda\lambda'$ avec Λ; mais les cordes telles que dd' enveloppent une parabole à laquelle on peut mener deux tangentes par le point de rencontre de $\lambda\lambda'$ avec Λ, l'une de ces tangentes fournit les droites L et L' et l'autre la droite cherchée. Chaque point de rencontre de L avec la courbe fournit donc deux points sur Λ; donc il y a en tout $2m$ points sur Λ, donc la surface est de l'ordre $2m$.

» *Si les deux courbes ont un point commun, c'est-à-dire un point qui, considéré comme appartenant à la première, soit lui-même son homologue dans la seconde, la surface réglée est de l'ordre* $2m-1$. »

Soient M le point commun, MT la tangente à la première courbe, MT' la tangente homologue à la seconde. Quand les points que l'on joint se rapprochent de M, la droite qui les joint tend à être parallèle au plan TMT'. Quand on est en M, les points à joindre sont confondus, et la droite qui les joint est arbitraire, mais contenue dans le plan qui renferme les points voisins, c'est-à-dire dans le plan TMT'; la surface de l'ordre $2m$ admet donc un plan, donc elle descend à l'ordre $2m-1$.

« *Et si les deux courbes ont deux points communs, la surface réglée est simplement un cylindre de l'ordre m.* »

Car il y a simple rotation, et les cordes sont parallèles.

« Ainsi, par exemple : *Deux coniques égales étant placées d'une manière quelconque dans l'espace, les droites qui joignent deux à deux leurs points homologues forment une surface réglée du quatrième ordre.*

» *Si les deux coniques ont un point commun, la surface est du troisième ordre.*

» *Et si les deux coniques ont deux points communs, la surface est un cylindre du second ordre.* »

(*La suite prochainement.*)

Mémoire sur les équations différentielles canoniques de la Mécanique;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

Je me propose dans ce Mémoire d'étudier certaines propriétés des équations différentielles canoniques de la Mécanique. Si l'on désigne par $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ les $2n$ variables du problème, et par t le temps, enfin par H une fonction de ces variables, ces équations sont renfermées dans les deux suivantes :

$$(1) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{dH}{dp_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{dH}{dq_i},$$

où i est susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, n$.

Il est évident que l'intégration de ces équations peut être, dans des cas particuliers donnés, plus ou moins facilitée par la forme de la fonction H. C'est donc une question intéressante que celle qui consiste à se proposer de transformer un système canonique dans un autre par un changement de variables, qui n'ait d'autre effet que de changer la forme de la fonction H. Je traite cette question dans ce Mémoire.

Imaginons ensuite que les $2n$ variables q_i, p_i satisfassent à des équations en quantités finies, au nombre de $2r$,

$$(2) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, \quad f_{2r} = 0,$$

r étant $\leqq n$, et que l'on ait, en outre, l'équation

$$(3) \qquad \frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \ldots + \frac{dq_n}{dt}\delta p_n - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \ldots - \frac{dp_n}{dt}\delta q_n = \delta H,$$

en désignant par la caractéristique δ les variations des quantités q_i, p_i

compatibles avec les équations (2), et δH représente la variation de H provenant de l'accroissement de ces variables. Dans le cas où r serait nul, les variations δq_i, δp_i seraient indépendantes, et l'on retrouverait le système des équations (1). Si l'on suppose, au lieu des équations (2), r équations conditionnelles qui renferment les n variables q_i, mais qui ne contiennent pas les variables p_i, ces équations jointes à (3) peuvent, comme je le montre, se rapporter à un problème de Mécanique. Dans ce cas, il est facile de prouver que le système des équations (2) et (3) peut être ramené à un système d'équations canoniques dont le nombre des variables se réduit à $2(n-r)$. Mais il est intéressant d'examiner le cas plus général où les équations conditionnelles données renferment non-seulement les variables q_i, mais encore les variables p_i; or je montre que le système des équations (2) et (3) peut être ramené à un système de $2(n-r)$ équations différentielles canoniques dépendant de la même fonction H, à l'aide du problème de Pfaff; je montre ensuite certains cas où cette réduction peut s'opérer plus facilement.

Le problème de Pfaff étant un problème de Calcul intégral d'une grande complication, il y a lieu de chercher à étudier le système des équations (2) et (3) tel qu'il se présente, et sans le ramener à un système canonique. Or je montre que le fameux théorème de Poisson et Jacobi, relatif aux équations canoniques, et qui permet de déduire, en général, de deux intégrales une troisième, est applicable à mon système d'équations; l'énoncé du théorème prend seulement une forme plus compliquée.

Je donne aussi dans ce Mémoire une théorie des perturbations qui renferme plusieurs considérations nouvelles; enfin j'expose des propriétés nouvelles de la fonction que l'on représente en Analyse par le symbole $[\alpha, \beta]$.

Équations différentielles de la Mécanique. Démonstration très-simple des équations hamiltoniennes.

1. Considérons un système de n points matériels; désignons par m_i la masse de chacun de ces points, et par x_i, y_i, z_i ses coordonnées par

rapport à trois axes rectangulaires, i ayant les valeurs $1, 2, \ldots, n$. Désignons par

$$(1) \qquad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, \quad F_k = 0$$

les équations qui expriment les liaisons auxquelles le système est assujetti. Imaginons un déplacement virtuel de tous les points du système, et soient en général δx_i, δy_i, δz_i les variations de x_i, y_i, z_i. Posons

$$\frac{dx_i}{dt} = x'_i, \quad \frac{dy_i}{dt} = y'_i, \quad \frac{dz_i}{dt} = z'_i,$$

l'expression de la demi-force vive est

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2);$$

supposons qu'il y ait une fonction de forces, que nous représenterons par U, et les équations différentielles du problème sont contenues dans la formule

$$(2) \qquad \sum m_i \left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i\right) = \delta U.$$

En différentiant T, on peut écrire les deux formules

$$2\delta T = \delta \sum m_i \left(x'_i \frac{dx_i}{dt} + y'_i \frac{dy_i}{dt} + z'_i \frac{dz_i}{dt}\right),$$

$$\delta T = \sum m_i \left(x'_i \delta \frac{dx_i}{dt} + y'_i \delta \frac{dy_i}{dt} + z'_i \delta \frac{dz_i}{dt}\right);$$

en changeant l'équation (2) de signe, puis ajoutant δT aux deux membres, nous pourrons la mettre sous cette forme

$$\delta \sum m_i \left(x'_i \frac{dx_i}{dt} + y'_i \frac{dy_i}{dt} + z'_i \frac{dz_i}{dt}\right) - \sum m_i \left(x'_i \delta \frac{dx_i}{dt} + y'_i \delta \frac{dy_i}{dt} + z'_i \delta \frac{dz_i}{dt}\right)$$
$$- \sum m_i \left(\frac{dx'_i}{dt}\delta x_i + \frac{dy'_i}{dt}\delta y_i + \frac{dz'_i}{dt}\delta z_i\right) = \delta T - \delta U.$$

Représentons la fonction $T - U$ par H, et l'équation précédente

deviendra

$$\delta\sum m_i\left(x_i'\frac{dx_i}{dt}+y_i'\frac{dy_i}{dt}+z_i'\frac{dz_i}{dt}\right)-\frac{d}{dt}\sum m_i(x_i'\delta x_i+y_i'\delta y_i+z_i'\delta z_i)=\delta H.$$

Représentons les quantités x_i, y_i, z_i par la lettre Q affectée de différents indices, et les quantités $m_i x_i'$, $m_i y_i'$, $m_i z_i'$ correspondantes par la lettre P affectée des mêmes indices, de sorte que l'équation précédente deviendra

$$(3)\qquad \delta\left(P_1\frac{dQ_1}{dt}+P_2\frac{dQ_2}{dt}+\ldots\right)-\frac{d}{dt}(P_1\delta Q_1+P_2\delta Q_2+\ldots)=\delta H.$$

Au moyen des r équations conditionnelles (1), on peut exprimer les variables Q ou x, y, z, qui sont au nombre de $3n$, au moyen de $3n-r$ variables seulement, et de manière que leurs expressions satisfassent identiquement aux équations (1); désignons par q_i ces $3n-r$ nouvelles variables, et choisissons des variables p_i en même nombre que les q_i, et qui satisfassent à l'équation

$$(4)\qquad p_1\delta q_1+p_2\delta q_2+\ldots+p_k\delta q_k=P_1\delta Q_1+\ldots+P_{3n}\delta Q_{3n},$$

en posant $3n-r=k$. En prenant les variations virtuelles égales à celles que subissent effectivement les variables q_i, Q_i dans l'instant dt, on déduit de l'équation précédente

$$(5)\qquad p_1\frac{dq_1}{dt}+\ldots+p_k\frac{dq_k}{dt}=P_1\frac{dQ_1}{dt}+\ldots+P_{3n}\frac{dQ_{3n}}{dt},$$

et, par suite, l'équation (3) devient

$$\delta\left(p_1\frac{dq_1}{dt}+\ldots+p_k\frac{dq_k}{dt}\right)-\frac{d}{dt}(p_1\delta q_1+\ldots+p_k\delta q_k)=\delta H,$$

ou encore

$$(A)\qquad \frac{dq_1}{dt}\delta p_1+\ldots+\frac{dq_k}{dt}\delta p_k-\frac{dp_1}{dt}\delta q_1-\ldots-\frac{dp_k}{dt}\delta q_k=\delta H;$$

or il n'existe plus d'équations conditionnelles entre les nouvelles va-

riables, et, comme on a

$$\delta H = \frac{dH}{dq_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{dH}{dq_k}\delta q_k + \frac{dH}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{dH}{dp_k}\delta p_k,$$

on en conclut les équations *hamiltoniennes*

$$\text{(B)}\qquad \begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{dH}{dp_1}, \ldots, & \dfrac{dq_k}{dt} = \dfrac{dH}{dp_k}, \\ \dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{dH}{dq_1}, \ldots, & \dfrac{dp_k}{dt} = -\dfrac{dH}{dq_k}. \end{cases}$$

2. Examinons les variables p; dans l'équation (4), les variations δq sont indépendantes, et l'on en conclut

$$\text{(6)}\qquad p_s = P_1\frac{dQ_1}{dq_s} + P_2\frac{dQ_2}{dq_s} + \ldots + P_{3n}\frac{dQ_{3n}}{dq_s}.$$

Telle est la formule qui permettra en général de passer des variables de l'équation (3) à celles de l'équation (A) et des équations (B); mais, en se rappelant ce que représentent les quantités Q, P, on peut obtenir de p_s une autre expression. On a alors, en effet,

$$p_s = \sum m_i\left(x'_i\frac{dx_i}{dq_s} + y'_i\frac{dy_i}{dq_s} + z'_i\frac{dz_i}{dq_s}\right);$$

or on a, en désignant par $q'_1, q'_2, \ldots$ les dérivées de $q_1, q_2, \ldots$ par rapport à t,

$$\text{(7)}\qquad x'_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{dx_i}{dq_1}q'_1 + \frac{dx_i}{dq_2}q'_2 + \ldots;$$

on en conclut la première des trois équations

$$\frac{dx'_i}{dq'_s} = \frac{dx_i}{dq_s}, \quad \frac{dy'_i}{dq'_s} = \frac{dy_i}{dq_s}, \quad \frac{dz'_i}{dq'_s} = \frac{dz_i}{dq_s},$$

et les deux autres s'obtiennent de même : on a donc enfin

$$\text{(8)}\qquad p_s = \sum m_i\left(x'_i\frac{dx'_i}{dq'_s} + y'_i\frac{dy'_i}{dq'_s} + z'_i\frac{dz'_i}{dq'_s}\right) = \frac{dT}{dq'_s}.$$

D'après cela, on aura la quantité p_s en exprimant T en fonction des variables q et de leurs dérivées q', et, en prenant la dérivée de T par rapport à q'_s. Dans les équations (B), $\mathrm{H} = \mathrm{T} - \mathrm{U}$ doit être exprimé au moyen des variables q_i, p_i : il faut donc exprimer T au moyen de ces variables. Or, de l'équation (5) on conclut

$$p_1 q'_1 + \ldots + p_k q'_k = 2\mathrm{T} ;$$

il suffit donc de porter dans cette équation les valeurs de $q'_1, q'_2, \ldots$ tirées des k équations (8).

Ce qui fait que la démonstration précédente des équations d'Hamilton est plus simple que celles qu'on a coutume de donner, c'est que nous remplaçons l'équation (2) par l'équation (3), qui est d'une forme plus générale et qui renferme cependant les mêmes propriétés à démontrer. La généralisation a alors pour effet d'obliger à aller au but par la voie la plus directe. Il faut, au contraire, remarquer que l'équation

$$p_s = \frac{d\mathrm{T}}{dq'_s}$$

est fondée sur la forme particulière des quantités Q, P. Toutefois, il est facile de démontrer que cette équation a lieu toutes les fois que la fonction donnée H de l'équation (3) se compose d'une fonction $-\mathrm{U}$ qui ne renferme que les variables Q et d'une fonction T, homogène et du second degré par rapport aux variables P, qui contient les variables Q d'une manière quelconque.

3. L'équation (A) présente certains avantages sur les équations (B). En effet, l'équation (A) est encore applicable dans le cas où il n'y a pas de fonction de forces dans le problème de Mécanique ; il suffit de convenir que, dans $\delta\mathrm{H} = \delta\mathrm{T} - \delta\mathrm{U}$, $\delta\mathrm{U}$ n'est pas une différentielle totale tant qu'on n'imagine pas les variables exprimées en fonction de t. Un second avantage de l'équation (A) consiste en ce qu'elle peut encore être admise dans le cas où les variables q satisferaient à des équations conditionnelles.

En effet, considérons r' des équations (1),

$$(9) \qquad \mathrm{F}_1 = 0, \quad \mathrm{F}_2 = 0, \ldots, \quad \mathrm{F}_{r'} = 0,$$

r' étant $< r$ et pouvant se réduire à zéro; il est possible d'exprimer les variables Q à l'aide de $3n - r'$ variables que nous désignerons par q_1, $q_2, \ldots, q_k$, en faisant $k = 3n - r'$, et de telle sorte que les expressions des variables Q satisfassent identiquement aux équations (9). En substituant ensuite ces expressions dans les $r - r'$ équations (1) qui n'ont pas encore été employées, on aura $r - r'$ équations conditionnelles entre les variables q,

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \ldots.$$

Alors, en posant l'équation (4), on sera encore conduit à l'équation (A), mais dans laquelle les variables δq, δp ne seront plus indépendantes. Les variables p_s seront encore données par la formule

$$p_s = \frac{dT}{dq'_s}.$$

En effet, les variations δq n'étant plus indépendantes dans l'équation (4), l'équation (4) n'entraîne pas nécessairement l'équation (6); mais il sera permis de poser d'abord les k équations renfermées dans l'équation (6), ce qui entraînera l'équation (4). Enfin l'équation (6) conduit comme ci-dessus à l'équation (8).

4. Nous avons admis, dans ce qui précède, que les liaisons ne dépendaient pas du temps t. Il est aisé de modifier notre analyse pour la rendre applicable au cas où ces équations contiennent le temps. Dans ce cas, il faut remarquer que les variations virtuelles ne peuvent se confondre avec les variations effectives, de sorte que l'équation (4) ne conduit plus à l'équation (5).

Les équations de liaison équivalent aux équations qui expriment les $3n$ variables Q_i au moyen des $3n - r$ variables q_i, et qui renferment actuellement le temps t,

$$\begin{aligned} Q_1 &= \varphi_1(q_1, q_2, \ldots, q_k, t), \\ Q_2 &= \varphi_2(q_1, q_2, \ldots, q_k, t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et si l'on éliminait $q_1, q_2, \ldots$ entre ces $3n$ équations, on aurait un système de r équations équivalant aux équations de liaison données.

Les variations $\delta Q_1, \delta Q_2, \ldots$ de l'équation (4) s'obtiennent en faisant varier $q_1, q_2, \ldots,$ mais en supposant t constant, ainsi que cela résulte du principe des vitesses virtuelles; ainsi l'on a

$$\delta Q_i = \frac{d\vartheta_i}{dq_1}\delta q_1 + \frac{d\vartheta_i}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{d\vartheta_i}{dq_k}\delta q_k.$$

Désignons par ϑ'_i la dérivée partielle de ϑ_i par rapport à t, nous aurons, pour la dérivée totale,

$$\frac{d\Theta_i}{dt} = \vartheta'_i + \frac{d\vartheta_i}{dq_1}q'_1 + \ldots + \frac{d\vartheta_i}{dq_k}q'_k;$$

les variations δq étant arbitraires, on peut faire en particulier et pour toutes les valeurs de $s = 1, 2, \ldots, k$

$$\delta q_s = q'_s\,dt,$$

et il en résulte

$$\delta Q_i = \left(\frac{d\Theta_i}{dt} - \vartheta'_i\right)dt.$$

L'équation (4) ne donnera donc plus l'équation (5), mais la suivante :

$$p_1\frac{dq_1}{dt} + \ldots + p_k\frac{dq_k}{dt} = P_1\frac{d\Theta_1}{dt} + \ldots + P_k\frac{d\Theta_k}{dt} - P_1\vartheta'_1 - \ldots - P_k\vartheta'_k.$$

Par là, l'équation (3) devient

$$\delta\left(p_1\frac{dq_1}{dt} + \ldots + p_k\frac{dq_k}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(p_1\delta q_1 + \ldots + p_k\delta q_k) = \delta(H - P_1\vartheta'_1 - P_2\vartheta'_2 - \ldots).$$

Ainsi l'équation (A) subsiste, pourvu qu'on y change H en

$$H - P_1\vartheta'_1 - P_2\vartheta'_2 - \ldots,$$

et les équations (B) subsisteront aussi avec le même changement. Les variables p continueront d'ailleurs à être données par les équations (8).

Transformation d'un système canonique d'équations différentielles dans un pareil système.

5. Considérons l'équation

$$(1)\qquad \frac{dq_1}{dt}\,\delta p_1 + \ldots + \frac{dq_n}{dt}\,\delta p_n - \frac{dp_1}{dt}\,\delta q_1 - \ldots - \frac{dp_n}{dt}\,\delta q_n = \delta \mathrm{H},$$

H étant une fonction des $2n$ variables q, p, qui peut même renfermer t. Nous supposons d'abord que les variables q, p ne sont liées par aucune équation conditionnelle, de sorte que l'équation précédente revient aux $2n$ équations renfermées dans les deux suivantes :

$$(2)\qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dp_i},\quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dq_i},$$

où i est susceptible des valeurs 1, 2, ..., n.

Nous nous proposons de passer des variables q_i, p_i à des variables Q_i, P_i en même nombre, qui satisfassent à des équations canoniques toutes semblables à (2), en sorte que la fonction H reste la même, mais prenne seulement une autre forme.

Pour y parvenir, nous reviendrons à l'équation (1) que nous mettrons sous cette forme

$$\delta\left(p_1\frac{dq_1}{dt} + \ldots + p_n\frac{dq_n}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(p_1\,\delta q_1 + \ldots + p_n\,\delta q_n) = \delta \mathrm{H}.$$

Alors il suffira de choisir des variables Q, P, fonctions des premières, et qui satisfassent à l'équation

$$(3)\qquad \mathrm{P}_1\,\delta \mathrm{Q}_1 + \ldots + \mathrm{P}_n\,\delta \mathrm{Q}_n = p_1\,\delta q_1 + \ldots + p_n\,\delta q_n;$$

car il en résultera aussi

$$\mathrm{P}_1\frac{d\mathrm{Q}_1}{dt} + \ldots + \mathrm{P}_n\frac{d\mathrm{Q}_n}{dt} = p_1\frac{dq_1}{dt} + \ldots + p_n\frac{dq_n}{dt};$$

on aura donc l'équation

$$\delta\left(P_1\frac{dQ_1}{dt}+\ldots+P_n\frac{dQ_n}{dt}\right)=\frac{d}{dt}(P_1\,\delta Q_1+\ldots+P_n\,\delta Q_n)+\delta H;$$

on en conclut une équation semblable à l'équation (1), dans laquelle les lettres p, q sont remplacées par P, Q, et, par suite, on a les équations

$$\frac{dQ_i}{dt}=\frac{dH}{dP_i},\quad \frac{dP_i}{dt}=-\frac{dH}{dQ_i}.$$

Examinons maintenant comment nous satisferons à l'équation (3). Elle revient à $2n$ équations renfermées dans les deux suivantes :

$$(4)\qquad P_i=p_1\frac{dq_1}{dQ_i}+p_2\frac{dq_2}{dQ_i}+\ldots+p_n\frac{dq_n}{dQ_i},$$

$$(5)\qquad 0=p_1\frac{dq_1}{dP_i}+p_2\frac{dq_2}{dP_i}+\ldots+p_n\frac{dq_n}{dP_i},$$

où i est susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, n$.

Des n équations (5) on conclut, en éliminant $p_1, p_2, \ldots, p_n$, que le déterminant

$$\sum \pm \frac{dq_1}{dP_1}\frac{dq_2}{dP_2}\cdots\frac{dq_n}{dP_n}$$

est nul, et, d'après un théorème bien connu, il en résulte qu'il existe entre les variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$, qui sont fonctions des variables Q_i, P_i, une relation qui ne renferme pas $P_1, P_2, \ldots, P_n$; cette relation peut s'écrire

$$(6)\qquad \psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)=0,$$

ψ désignant une fonction arbitraire. En différentiant cette équation successivement par rapport à Q_i et à P_i, on a

$$(7)\qquad \begin{aligned}-\frac{d\psi}{dQ_i}&=\frac{d\psi}{dq_1}\frac{dq_1}{dQ_i}+\frac{d\psi}{dq_2}\frac{dq_2}{dQ_i}+\ldots+\frac{d\psi}{dq_n}\frac{dq_n}{dQ_i},\\ 0&=\frac{d\psi}{dq_1}\frac{dq_1}{dP_i}+\frac{d\psi}{dq_2}\frac{dq_2}{dP_i}+\ldots+\frac{d\psi}{dq_n}\frac{dq_n}{dP_i}.\end{aligned}$$

En comparant les n équations renfermées dans cette dernière avec les n équations (5), on a

$$(8)\qquad \frac{d\psi}{dq_1} = \mu p_1,\quad \frac{d\psi}{dq_2} = \mu p_2,\ \ldots,\ \frac{d\psi}{dq_n} = \mu p_n,$$

μ étant un facteur indéterminé, et, en comparant (4) avec (7), on a

$$P_i = -\frac{1}{\mu}\frac{d\psi}{dQ_i},$$

ou les n équations

$$(9)\qquad \frac{d\psi}{dQ_1} = -\mu P_1,\quad \frac{d\psi}{dQ_2} = -\mu P_2,\ldots,\ \frac{d\psi}{dQ_n} = -\mu P_n.$$

Des équations (6) et (8), on peut tirer μ, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, puis des équations (9) tirer $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Un cas particulier de la solution précédente mérite d'être remarqué, c'est celui où l'on prend, comme dans le n° 1, pour les variables q_i des fonctions quelconques de $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$; alors les n équations (5) sont identiquement satisfaites, et les P_i sont déterminées par les n équations (4). Ce cas particulier a été donné par Jacobi (*Jacobi's Dynamik*, p. 453).

La résolution de l'équation (1) peut, comme on sait, être remplacée par celle d'une équation aux différences partielles, H étant une fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$,

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n);$$

faisons-y

$$p_1 = \frac{dV}{dq_1},\quad p_2 = \frac{dV}{dq_2},\ \ldots;$$

il suffira de résoudre l'équation aux différences partielles

$$(10)\qquad H\left(\frac{dV}{dq_1}, \frac{dV}{dq_2}, \ldots, q_1, q_2, \ldots\right) = h,$$

où h est une constante arbitraire, ou plutôt d'en trouver une solution complète. A la transformation de l'équation (1) correspond une trans-

formation de l'équation (10), et la formule

$$P_1 \delta Q_1 + P_2 \delta Q_2 + \ldots = p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \ldots$$

montre que la fonction V est la même dans l'équation (10) et dans celle en laquelle elle se transforme.

6. Comparons la règle que je viens de donner, pour passer d'un système canonique à un système semblable avec celle qui a été donnée par Jacobi pour résoudre le même problème (*Dynamik*, p. 447). Voici cette règle :

« Supposons $2n$ variables q_i, p_i données par les équations hamiltoniennes

$$(a) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{dH}{dp_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{dH}{dq_i},$$

où i est susceptible des valeurs 1, 2,..., n; soit, de plus,

$$\psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$$

une fonction arbitraire des n variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et de n nouvelles variables $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$; déterminons $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, et d'autres $P_1, P_2, \ldots, P_n$ en fonction des premières variables au moyen des équations

$$(b) \qquad \frac{d\psi}{dq_1} = p_1, \quad \frac{d\psi}{dq_2} = p_2, \ldots, \quad \frac{d\psi}{dq_n} = p_n,$$

$$(c) \qquad \frac{d\psi}{dQ_1} = -P_1, \quad \frac{d\psi}{dQ_2} = -P_2, \ldots, \quad \frac{d\psi}{dQ_n} = -P_n;$$

les variables Q_i, P_i satisferont aux équations

$$(d) \qquad \frac{dQ_i}{dt} = \frac{dH}{dP_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{dH}{dQ_i}. »$$

On voit que la règle que j'ai donnée ci-dessus a une grande analogie avec celle de Jacobi ; les équations (8) et (9) sont identiques aux équations (b) et (c), si l'on y fait $\mu = 1$. La solution de Jacobi renferme l'inconnue μ en moins, et, par compensation, elle renferme une équation

de moins, qui est

$$\psi = 0.$$

La règle de Jacobi peut se démontrer très-simplement comme il suit.

Le système des équations (a) peut être remplacé par la suivante :

$$(11)\qquad \delta\left(p_1 \frac{dq_1}{dt} + \ldots + p_n \frac{dq_n}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(p_1 \delta q_1 + \ldots + p_n \delta q_n) = \delta \mathrm{H}.$$

Or on a, d'après les équations (b),

$$\begin{aligned}
&\delta\left(p_1 \frac{dq_1}{dt} + \ldots + p_n \frac{dq_n}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(p_1 \delta q_1 + \ldots + p_n \delta q_n)\\
&= \delta\left(\frac{d\psi}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \ldots + \frac{d\psi}{dq_n}\frac{dq_n}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{dq_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{d\psi}{dq_n}\delta q_n\right)\\
&= \delta\left(-\frac{d\psi}{d\mathrm{Q}_1}\frac{d\mathrm{Q}_1}{dt} - \ldots - \frac{d\psi}{d\mathrm{Q}_n}\frac{d\mathrm{Q}_n}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\left(-\frac{d\psi}{d\mathrm{Q}_1}\delta \mathrm{Q}_1 - \ldots - \frac{d\psi}{d\mathrm{Q}_n}\delta \mathrm{Q}_n\right);
\end{aligned}$$

car l'égalité des deux derniers membres revient à

$$\delta \frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt}\delta\psi.$$

En ayant égard aux équations (c), on voit donc que le premier membre de l'équation (11) est égal à l'expression

$$\delta\left(\mathrm{P}_1 \frac{d\mathrm{Q}_1}{dt} + \ldots + \mathrm{P}_n \frac{d\mathrm{Q}_n}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(\mathrm{P}_1 \delta \mathrm{Q}_1 + \ldots + \mathrm{P}_n \delta \mathrm{Q}_n),$$

qui est ainsi égal à $\delta\mathrm{H}$, et l'on en conclut les équations (d).

7. On peut encore imaginer beaucoup d'autres moyens pour passer d'un système canonique à un autre semblable. Nous allons en indiquer quelques autres.

Le système des équations canoniques est renfermé dans une seule

$$\frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \ldots + \frac{dq_n}{dt}\delta p_n - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \ldots - \frac{dp_n}{dt}\delta q_n = \delta \mathrm{H},$$

et celle-ci peut se mettre sous ces deux formes

$$\delta\left(p_1\frac{dq_1}{dt}+\ldots+p_n\frac{dq_n}{dt}\right)-\frac{d}{dt}(p_1\delta q_1+\ldots+p_n\delta q_n)=\delta H,$$

$$-\delta\left(q_1\frac{dp_1}{dt}+\ldots+q_n\frac{dp_n}{dt}\right)+\frac{d}{dt}(q_1\delta p_1+\ldots+q_n\delta p_n)=\delta H;$$

en les ajoutant, on a

$$\delta\left(p_1\frac{dq_1}{dt}-q_1\frac{dp_1}{dt}+p_2\frac{dq_2}{dt}-q_2\frac{dp_2}{dt}+\ldots\right)$$
$$-\frac{d}{dt}(p_1\delta q_1-q_1\delta p_1+p_2\delta q_2-q_2\delta p_2+\ldots)=2\delta H.$$

On en conclut aisément que les variables $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$ satisferont à un système canonique semblable, si elles satisfont à l'équation

$$(A)\quad \begin{aligned} &P_1\delta Q_1-Q_1\delta P_1+\ldots+P_n\delta Q_n-Q_n\delta P_n\\ &=p_1\delta q_1-q_1\delta p_1+\ldots+p_n\delta q_n-q_n\delta p_n,\end{aligned}$$

qui équivaut, comme on sait, à $2n$ équations.

Remarquons encore la transformation indiquée par l'équation

$$2(P_1\delta Q_1+\ldots+P_n\delta Q_n)=p_1\delta q_1-q_1\delta p_1+\ldots+p_n\delta q_n-q_n\delta p_n,$$

et celle qui en résulte par l'échange des grandes lettres avec les petites.

On voit, par ce qui précède, qu'il s'est glissé une inadvertance dans le *Traité de Dynamique*, de Jacobi, à la page 453, où il est dit qu'on vient de donner toutes les transformations possibles d'un système canonique dans un autre. Cette inadvertance s'explique d'ailleurs très-aisément dans une œuvre posthume.

Revenons sur la transformation renfermée dans la formule (A). Posons généralement

$$P_i=R_i\cos\Theta_i,\quad Q_i=R_i\sin\Theta_i,$$
$$p_i=r_i\cos\theta_i,\quad q_i=r_i\sin\theta_i.$$

i étant susceptible des valeurs $1, 2, \dots, n$. La formule (A) deviendra

$$(B) \qquad R_1^2\, d\Theta_1 + \dots + R_n^2\, d\Theta_n = r_1^2\, d\theta_1 + \dots + r_n^2\, d\theta_n.$$

Si l'on prend pour les θ des fonctions déterminées des Θ, réciproquement les Θ pourront s'exprimer au moyen des θ et les R seront donnés par la formule

$$R_i^2 = r_1^2 \frac{d\theta_1}{d\Theta_i} + r_2^2 \frac{d\theta_2}{d\Theta_i} + \dots + r_n^2 \frac{d\theta_n}{d\Theta_i}.$$

Plus généralement on pourrait raisonner sur l'équation (B), ainsi qu'on l'a fait, au n° 5, sur l'équation

$$P_1 \delta Q_1 + \dots + P_n \delta Q_n = p_1 \delta q_1 + \dots + p_n \delta q_n.$$

Transformation d'un certain système d'équations dans un système canonique.

8. Supposons encore que les variables $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots p_n$ satisfassent à l'équation

$$(1) \qquad \frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \dots + \frac{dq_n}{dt}\delta p_n - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \dots - \frac{dp_n}{dt}\delta q_n = \delta H;$$

mais supposons en outre que ces variables soient liées par $2r$ équations conditionnelles

$$(2) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \dots \quad f_{2r} = 0.$$

Je vais démontrer que ces $2n$ variables peuvent être remplacées par un système de $2n - 2r$ variables $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-r}, P_1, P_2, \dots, P_{n-r}$ qui satisfont aux $2n - 2r$ équations canoniques

$$(3) \qquad \frac{dQ_i}{dt} = \frac{dH}{dP_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{dH}{dQ_i},$$

i étant susceptible des valeurs $1, 2, \dots, n - r$.

Nous pouvons remarquer que ce théorème est déjà démontré au

n° I de ce Mémoire dans le cas où les équations conditionnelles ne renferment que les variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Mettons encore l'équation (1) sous cette forme.

$$\delta\left(p_1 \frac{dq_1}{dt} + \ldots + p_n \frac{dq_n}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(p_1 \delta q_1 + \ldots + p_n \delta q_n) = \delta \mathrm{H};$$

si nous choisissons de nouvelles variables qui satisfassent à l'équation

$$(4) \qquad p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \ldots + p_n \delta q_n = \mathrm{P}_1 \delta \mathrm{Q}_1 + \ldots + \mathrm{P}_{n-r} \delta \mathrm{Q}_{n-r},$$

nous aurons

$$\delta\left(\mathrm{P}_1 \frac{d\mathrm{Q}_1}{dt} + \ldots + \mathrm{P}_{n-r} \frac{d\mathrm{Q}_{n-r}}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(\mathrm{P}_1 \delta \mathrm{Q}_1 + \ldots + \mathrm{P}_{n-r} \delta \mathrm{Q}_{n-r}) = \delta \mathrm{H},$$

et comme les variations $\delta \mathrm{Q}_1, \delta \mathrm{Q}_2, \ldots, \delta \mathrm{P}_1, \delta \mathrm{P}_2, \ldots$ seront indépendantes on en conclura les équations (3).

Montrons comment on pourra satisfaire à l'équation (4). En différentiant les équations (2) selon la caractéristique δ, on aura

$$\begin{aligned}
&\frac{df_1}{dq_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{df_1}{dq_{n-r}}\delta q_{n-r} + \frac{df_1}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{df_1}{dp_{n-r}}\delta p_{n-r} \\
&\quad = -\frac{df_1}{dq_{n-r+1}}\delta q_{n-r+1} - \ldots - \frac{df_1}{dq_n}\delta q_n - \frac{df_1}{dp_{n-r+1}}\delta p_{n-r+1} - \ldots - \frac{df_1}{dp_n}\delta p_n, \\
&\frac{df_2}{dq_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{df_2}{dq_{n-r}}\delta q_{n-r} + \frac{df_2}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{df_2}{dp_{n-r}}\delta p_{n-r} \\
&\quad = -\frac{df_2}{dq_{n-r+1}}\delta q_{n-r+1} - \ldots - \frac{df_2}{dq_n}\delta q_n - \frac{df_2}{dp_{n-r+1}}\delta p_{n-r+1} - \ldots - \frac{df_2}{dp_n}\delta p_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

De ces $2r$ équations on peut tirer les $2r$ variations $\delta q_{n-r+1}, \ldots, \delta q_n$, $\delta p_{n-r+1}, \ldots, \delta p_n$, et en les portant dans l'équation (4) on aura une équation de cette forme

$$\begin{aligned}
&\mathrm{G}_1 \delta q_1 + \mathrm{G}_2 \delta q_2 + \ldots + \mathrm{G}_{n-r} \delta q_{n-r} + \mathrm{L}_1 \delta p_1 + \mathrm{L}_2 \delta p_2 + \ldots + \mathrm{L}_{n-r} \delta p_{n-r} \\
&\quad = \mathrm{P}_1 \delta \mathrm{Q}_1 + \mathrm{P}_2 \delta \mathrm{Q}_2 + \ldots + \mathrm{P}_{n-r} \delta \mathrm{Q}_{n-r},
\end{aligned}$$

$\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \ldots, \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \ldots$ pouvant, d'après les équations (2), être réduits à ne contenir que les variables $q_1, q_2, \ldots, q_{n-r}, p_1, p_2, \ldots, p_{n-r}$.

La question est donc ramenée à transformer l'expression différentielle du premier membre en une autre qui renferme moitié moins de différentielles des variables. Ce problème est connu sous le nom de *problème de Pfaff*, et l'on sait qu'il est toujours possible.

Il est utile de remarquer que le problème de Pfaff ne peut se résoudre que par des opérations de Calcul intégral d'une grande complication; nous montrerons plus loin comment on pourra éviter ce problème dans certains cas. D'ailleurs la seule possibilité de la réduction des équations (1) et (2) à un système canonique conduit à des conséquences importantes.

Sur des cas où la transformation du système d'équations du n° 8 en un système canonique peut s'effectuer facilement.

9. Nous avons vu que le système d'équations entre les variables q_i, p_i,

$$(1)\qquad \frac{dq_1}{dt}\delta p_1+\ldots+\frac{dq_n}{dt}\delta p_n-\frac{dp_1}{dt}\delta q_1-\ldots-\frac{dp_n}{dt}\delta q_n=\delta \mathrm{H},$$

$$(2)\qquad f_1=0,\quad f_2=0,\ \ldots,\ f_r=0,$$

$$(3)\qquad f_{r+1}=0,\quad f_{r+2}=0,\ \ldots,\ f_{2r}=0,$$

peut toujours se transformer en un système canonique à l'aide du problème de Pfaff. Nous allons examiner des cas où la transformation pourra s'effectuer sans aucune opération de Calcul intégral.

Supposons que, parmi les équations conditionnelles (2) et (3), les r premières ne renferment que les variables q_i. D'après les équations (2), on peut donc exprimer ces variables au moyen de $n-r$ variables seulement $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2,\ldots, \mathrm{Q}_{n-r}$, en sorte que leurs expressions

$$(4)\qquad q_1=\varphi_1(\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2,\ldots,\mathrm{Q}_{n-r}),\ldots,\quad q_n=\varphi_n(\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2,\ldots,\mathrm{Q}_{n-r})$$

satisfassent identiquement aux équations (2); et, en éliminant Q_1, $\mathrm{Q}_2,\ldots, \mathrm{Q}_{n-r}$ entre les équations (4), on trouverait un système de r équations équivalant aux équations (2). Les variables q_i ne sont exprimables au moyen des Q_i que par les formules (4), tandis que les Q_i sont fonctions des q_i d'une infinité de manières.

Mettons l'équation (1) sous cette forme

$$\delta\left(p_1\frac{dq_1}{dt}+\ldots+p_n\frac{dq_n}{dt}\right)=\frac{d}{dt}(p_1\delta q_1+\ldots+p_n\delta q_n)-\delta H,$$

et nous voyons qu'il suffira de déterminer des variables $P_1, P_2, \ldots, P_{n-r}$ qui satisfassent à l'équation

$$(5)\qquad P_1\delta Q_1+\ldots+P_{n-r}\delta Q_{n-r}=p_1\delta q_1+p_2\delta q_2+\ldots+p_n\delta q_n.$$

Par hypothèse, les variables q_i ne dépendent pas des variables P; cette équation équivaut donc aux $n-r$ suivantes :

$$(6)\qquad \begin{cases} P_1=p_1\dfrac{dq_1}{dQ_1}+p_2\dfrac{dq_2}{dQ_1}+\ldots+p_n\dfrac{dq_n}{dQ_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_{n-r}=p_1\dfrac{dq_1}{dQ_{n-r}}+p_2\dfrac{dq_2}{dQ_{n-r}}+\ldots+p_n\dfrac{dq_n}{dQ_{n-r}}. \end{cases}$$

En différentiant les équations (2), on a

$$\begin{aligned} &\frac{df_1}{dq_1}\delta q_1+\frac{df_1}{dq_2}\delta q_2+\ldots+\frac{df_1}{dq_n}\delta q_n=0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\frac{df_r}{dq_1}\delta q_1+\frac{df_r}{dq_2}\delta q_2+\ldots+\frac{df_r}{dq_n}\delta q_n=0; \end{aligned}$$

multiplions ces équations par des fonctions inconnues $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ et retranchons-les de l'équation (5), nous aurons, en égalant à zéro les coefficients des variations δq,

$$(7)\qquad \begin{cases} P_1\dfrac{dQ_1}{dq_1}+P_2\dfrac{dQ_2}{dq_1}+\ldots+P_{n-r}\dfrac{dQ_{n-r}}{dq_1}=p_1-\mu_1\dfrac{df_1}{dq_1}-\ldots-\mu_r\dfrac{df_r}{dq_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_1\dfrac{dQ_1}{dq_n}+P_2\dfrac{dQ_2}{dq_n}+\ldots+P_{n-r}\dfrac{dQ_{n-r}}{dq_n}=p_n-\mu_1\dfrac{df_1}{dq_n}-\ldots-\mu_r\dfrac{df_r}{dq_n}. \end{cases}$$

Comme nous l'avons dit, les Q_i sont fonctions des q_i d'une infinité de manières, et l'on obtient l'une quelconque d'entre elles en formant

$n-r$ combinaisons des équations (4) et en résolvant les équations résultantes par rapport à $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$; alors on aura à porter les expressions de ces dernières quantités dans les premiers membres des équations (7).

Les n équations (7) jointes aux r équations (3) permettent de tirer $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et $q_1, q_2, \ldots, q_r$ en fonction des variables P_i et q_i et par suite en fonction des variables P_i, Q_i.

Il est évident que la méthode précédente sera applicable toutes les fois que l'on pourra combiner les équations conditionnelles données de manière à obtenir r équations distinctes qui ne renferment que le système des variables q_i ou celui des variables p_i, et ceci se présentera toutes les fois que le nombre des variables p_i ou celui des variables q_i qui entreront dans les équations conditionnelles (2) et (3) ne sera pas plus grand que r.

Remarquons encore que chaque variable q_i est conjuguée à une variable p_i, mais que les n variables q_i et les n variables p_i ne forment pas deux systèmes essentiellement distincts.

En effet posons

$$p_s = q'_s \quad \text{et} \quad q_s = -p'_s,$$

et l'équation (1) peut s'écrire

$$\begin{aligned}&\frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \ldots + \frac{dq_{s-1}}{dt}\delta p_{s-1} + \frac{dq'_s}{dt}\delta p'_s + \frac{dq_{s+1}}{dt}\delta p_{s+1} + \ldots \\ &- \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \ldots - \frac{dp_{s-1}}{dt}\delta q_{s-1} - \frac{dp'_s}{dt}\delta q'_s - \frac{dp_{s+1}}{dt}\delta q_{s+1} - \ldots = \delta H:\end{aligned}$$

p_s prend ainsi la place de q_s, et $-q_s$ celle de p_s. Il suit de là que la méthode précédente est aussi applicable toutes les fois que l'on pourra combiner les équations conditionnelles données, de manière à obtenir un système de r équations distinctes, qui ne renferme pas plus d'une variable de chacun des n couples

$$q_1, p_1, \quad q_2, p_2, \quad q_3, p_3, \ldots.$$

10. Examinons le cas où il serait donné seulement r équations conditionnelles

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, \quad f_r = 0$$

ne renfermant que les variables q_i. En différentiant une quelconque d'entre elles, on aura

$$\frac{df}{dq_1}\frac{dq_1}{dt}+\frac{df}{dq_2}\frac{dq_2}{dt}+\ldots=0;$$

mais, dans le cas actuel, l'équation (1) donne

$$\frac{dq_1}{dt}=\frac{dH}{dp_1},\quad \frac{dq_2}{dt}=\frac{dH}{dp_2},\ldots;$$

on a donc

$$\frac{df}{dq_1}\frac{dH}{dp_1}+\frac{df}{dq_2}\frac{dH}{dp_2}+\ldots=0,$$

qu'on peut écrire plus simplement

$$[f_i, H]=0.$$

La théorie précédente peut donc encore être appliquée, pourvu qu'on y fasse

$$f_{r+1}=[f_1, H],\quad f_{r+2}=[f_2, H],\ldots,\quad f_{2r}=[f_r, H].$$

Au reste, ce cas se trouve traité au n° **1**.

On pourrait faire une application de ce cas particulier à l'intéressant Mémoire de Bour *Sur les mouvements relatifs* (*Journal de M. Liouville*, t. VIII, 1863). En appliquant les formules (6), on obtient immédiatement, sous la forme canonique, les équations du mouvement relatif d'un système à liaisons quelconques, que Bour obtient par un calcul comparativement très-long, qui s'étend de la page 11 à la page 19 du tome cité.

Abaissement du nombre des équations conditionnelles.

11. Soit l'équation

$$(1)\qquad \frac{dq_1}{dt}\delta p_1+\ldots+\frac{dq_n}{dt}\delta p_n-\frac{dp_1}{dt}\delta q_1-\ldots-\frac{dp_n}{dt}\delta q_n=\delta H,$$

et les $2r$ équations conditionnelles

$$(2)\qquad f_1=0,\quad f_2=0,\ \ldots,\ f_{2r}=0.$$

Nous avons vu qu'on peut réduire ce système d'équations à un système canonique ; on abaisse ainsi le nombre r à zéro et le nombre n à $n - r$. Mais il n'est pas sans intérêt d'examiner les cas où l'on pourra abaisser les nombres n et r d'un nombre d'unités moindre que r, sans effectuer aucune opération de Calcul intégral, car on s'approchera ainsi du système canonique.

Supposons que les équations (2) ne renferment que k des variables p_i que nous désignerons par $p_1, p_2, \ldots, p_k$ et que k soit $\leq 2r$ et $\geq r$. (Si k était plus petit que r, on serait ramené à la question du n° **9**.)

Des équations (2), éliminons $p_1, p_2, \ldots, p_k$, il en résultera $2r - k$ équations

$$(3) \qquad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots, \quad \varphi_{2r-k} = 0,$$

qui ne renfermeront que les variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Prenons ensuite k des équations (2) qui soient distinctes des équations (3), et puissent par conséquent, avec ces dernières, remplacer les équations (2), et partageons-les en deux groupes, que nous disposons ainsi sur deux lignes :

$$(4) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_{2r-k} = 0,$$

$$(5) \qquad f_{2r-k+1} = 0, \ldots, \quad f_k = 0.$$

Au moyen des équations (3), nous pouvons exprimer les n variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$ au moyen de $n - 2r + k$ variables seulement, que nous désignerons par $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-2r+k}$. Puis choisissons des variables $P_1, P_2, \ldots, P_{n-2r+k}$, de manière à avoir

$$P_1\, \delta Q_1 + \ldots + P_{n-2r+k}\, \delta Q_{n-2r+k} = p_1\, \delta q_1 + \ldots + p_n\, \delta q_n ;$$

cette équation revient à celle-ci :

$$(6) \left\{ \begin{aligned} & P_1 \left(\frac{dQ_1}{dq_1} \delta q_1 + \frac{dQ_1}{dq_2} \delta q_2 + \ldots + \frac{dQ_1}{dq_n} \delta q_n \right) + P_2 \left(\frac{dQ_2}{dq_1} \delta q_1 + \ldots + \frac{dQ_2}{dq_n} \delta q_n \right) + \ldots \\ & \quad = p_1\, \delta q_1 + \ldots + p_n\, \delta q_n. \end{aligned} \right.$$

Les variables q_i s'expriment d'une manière unique au moyen des variables Q_i ; les variables Q_i, au contraire, s'expriment au moyen des

q_i d'une infinité de manières. Imaginons une de ces manières, de sorte que les dérivées des Q_i, par rapport aux q_i, sont alors parfaitement déterminées.

Différentions les équations (3), puis multiplions-les par des coefficients indéterminés $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{2r-k}$; enfin ajoutons-les à l'équation (6); nous en déduirons les n équations suivantes :

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{l} P_1 \frac{dQ_1}{dq_1} + P_2 \frac{dQ_2}{dq_1} + \ldots + P_{n-2r+k} \frac{dQ_{n-2r+k}}{dq_1} = p_1 + \rho_1 \frac{d\varphi_1}{dq_1} + \ldots + \rho_{2r-k} \frac{d\varphi_{2r-k}}{dq_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_1 \frac{dQ_1}{dq_n} + P_2 \frac{dQ_2}{dq_n} + \ldots + P_{n-2r+k} \frac{dQ_{n-2r+k}}{dq_n} = p_n + \rho_1 \frac{d\varphi_1}{dq_n} + \ldots + \rho_{2r-k} \frac{d\varphi_{2r-k}}{dq_n}. \end{array} \right.$$

Réunissons les n équations (7) aux équations (4), et nous aurons $n + 2r - k$ équations pour déterminer les $n + 2r - k$ variables p_1, $p_2, \ldots, p_n$ et $\rho_1, \rho_2, \ldots$ en fonction des P_i et q_i; par suite, on pourra déterminer les variables p_i en fonction des P_i et Q_i.

Substituons les valeurs des q_i et p_i en fonction des Q_i, P_i dans les $2(k - r)$ équations (5), et nous aurons ainsi $2(k - r)$ équations conditionnelles entre les Q_i, P_i, avec l'équation

$$\frac{dQ_1}{dt}\delta P_1 + \ldots + \frac{dQ_{n-2r+k}}{dt}\delta P_{n-2r+k} - \frac{dP_1}{dt}\delta Q_1 - \ldots - \frac{dP_{n-2r+k}}{dt}\delta Q_{n-2r+k} = \delta H;$$

nous avons donc abaissé les nombres n et r des équations (1) et (2) de ces $2r - k$ unités.

On doit remarquer que, si $2r$ est plus grand que n ou égal à n, la méthode précédente sera toujours applicable en y faisant $k = n$; car on pourra alors toujours éliminer les n variables p entre les équations (2). Le nombre $n - 2r + k$ devient $2(n - r)$; ainsi le nombre n de l'équation (1) sera abaissé à $2(n - r)$, et le nombre des équations conditionnelles se réduira au même nombre.

Introduction des dérivées principales de H dans le système des équations précédemment étudiées.

12. Imaginons une fonction quelconque φ des variables $q_1, q_2, \ldots$, $q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, et supposons que ces variables satisfassent à $2r$

équations

$$(1) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_{2r} = 0.$$

En différentiant l'expression de φ, nous aurons

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dq_1}dq_1 + \frac{d\varphi}{dq_2}dq_2 + \ldots + \frac{d\varphi}{dq_n}dq_n + \frac{d\varphi}{dp_1}dp_1 + \ldots + \frac{d\varphi}{dp_n}dp_n,$$

et, en différentiant les équations (1), nous aurons

$$0 = \frac{df_1}{dq_1}dq_1 + \frac{df_1}{dq_2}dq_2 + \ldots + \frac{df_1}{dq_n}dq_n + \frac{df_1}{dp_1}dp_1 + \ldots + \frac{df_1}{dp_n}dp_n,$$

$$0 = \frac{df_2}{dq_1}dq_1 + \frac{df_2}{dq_2}dq_2 + \ldots + \frac{df_2}{dq_n}dq_n + \frac{df_2}{dp_1}dp_1 + \ldots + \frac{df_2}{dp_n}dp_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Multiplions ces équations respectivement par des fonctions des mêmes variables que nous désignerons par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ et ajoutons-les à l'expression de $d\varphi$; nous obtiendrons ainsi $d\varphi$ sous une autre forme dépendante des fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Les coefficients de $dq_1, dq_2, \ldots, dp_1, dp_2, \ldots$, forment un groupe de dérivées *virtuelles* de la fonction φ. Représentons-les ainsi :

$$(2) \quad \begin{cases} \left(\dfrac{d\varphi}{dq_1}\right) = \dfrac{d\varphi}{dq_1} + \lambda_1 \dfrac{df_1}{dq_1} + \lambda_2 \dfrac{df_2}{dq_1} + \ldots + \lambda_{2r} \dfrac{df_{2r}}{dq_1}, \\ \left(\dfrac{d\varphi}{dq_2}\right) = \dfrac{d\varphi}{dq_2} + \lambda_1 \dfrac{df_1}{dq_2} + \lambda_2 \dfrac{df_2}{dq_2} + \ldots + \lambda_{2r} \dfrac{df_{2r}}{dq_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \left(\dfrac{d\varphi}{dp_1}\right) = \dfrac{d\varphi}{dp_1} + \lambda_1 \dfrac{df_1}{dp_1} + \lambda_2 \dfrac{df_2}{dp_1} + \ldots + \lambda_{2r} \dfrac{df_{2r}}{dp_1}, \\ \left(\dfrac{d\varphi}{dp_2}\right) = \dfrac{d\varphi}{dp_2} + \lambda_1 \dfrac{df_1}{dp_2} + \lambda_2 \dfrac{df_2}{dp_2} + \ldots + \lambda_{2r} \dfrac{df_{2r}}{dp_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Suivant la notation habituelle, posons, u et v étant deux fonctions quelconques des variables,

$$[u, v] = \frac{du}{dq_1}\frac{dv}{dp_1} + \frac{du}{dq_2}\frac{dv}{dp_2} + \ldots + \frac{du}{dq_n}\frac{dv}{dp_n} - \frac{du}{dp_1}\frac{dv}{dq_1} - \frac{du}{dp_2}\frac{dv}{dq_2} - \ldots - \frac{du}{dp_n}\frac{dv}{dq_n}.$$

Alors, si nous multiplions les équations (2) respectivement par $\frac{df_i}{dp_1}$, $\frac{df_i}{dp_2}$, ..., et les équations (3) par $\frac{df_i}{dq_1}$, $\frac{df_i}{dq_2}$, ..., et qu'ensuite nous retranchions la somme des secondes de celle des premières, nous aurons

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d\varphi}{dq_1}\right)\frac{df_i}{dp_1}+\left(\frac{d\varphi}{dq_2}\right)\frac{df_i}{dp_2}+\ldots+\left(\frac{d\varphi}{dq_r}\right)\frac{df_i}{dp_r}\\ -&\left(\frac{d\varphi}{dp_1}\right)\frac{df_i}{dq_1}-\left(\frac{d\varphi}{dp_2}\right)\frac{df_i}{dq_2}-\ldots-\left(\frac{d\varphi}{dp_r}\right)\frac{df_i}{dq_r}\\ &=[\varphi, f_i]+[f_1, f_i]\lambda_1+[f_2, f_i]\lambda_2+\ldots+[f_{2r}, f_i]\lambda_{2r},\end{aligned}$$

et, comme i est susceptible des valeurs 1, 2, ..., $2r$, cette équation en renferme $2r$ distinctes. Adoptons maintenant, pour les fonctions λ_1, λ_2, ..., celles qui annulent le second membre de l'équation précédente, et qui sont, par suite, les solutions de ces $2r$ équations,

$$(4)\quad\left\{\begin{array}{l}\qquad\qquad\quad [f_2, f_1]\lambda_2+[f_3, f_1]\lambda_3+\ldots+[f_{2r}, f_1]\lambda_{2r}=[f_1, \varphi],\\ [f_1, f_2]\lambda_1\qquad\qquad\quad +[f_3, f_2]\lambda_3+\ldots+[f_{2r}, f_2]\lambda_{2r}=[f_2, \varphi],\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ [f_1, f_{2r}]\lambda_1+[f_2, f_{2r}]\lambda_2+[f_3, f_{2r}]\lambda_3+\ldots\qquad\qquad=[f_{2r}, \varphi].\end{array}\right.$$

Les dérivées virtuelles de φ satisfont donc aux $2r$ équations renfermées dans la suivante :

$$(5)\quad\left\{\begin{array}{l}\frac{df_i}{dp_1}\left(\frac{d\varphi}{dq_1}\right)+\frac{df_i}{dp_2}\left(\frac{d\varphi}{dq_2}\right)+\ldots+\frac{df_i}{dp_r}\left(\frac{d\varphi}{dq_r}\right)\\ -\frac{df_i}{dq_1}\left(\frac{d\varphi}{dp_1}\right)-\frac{df_i}{dq_2}\left(\frac{d\varphi}{dp_2}\right)-\ldots-\frac{df_i}{dq_r}\left(\frac{d\varphi}{dp_r}\right)=0,\end{array}\right.$$

où i est susceptible des valeurs 1, 2, ..., $2r$.

Quand les quantités λ ont les valeurs déterminées par les équations (4), nous donnons aux dérivées virtuelles de φ le nom de *dérivées principales*, et nous désignerons de plus l'expression

$$\psi=\varphi+\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\ldots+\lambda_{2r} f_{2r}$$

sous le nom de *forme principale* de la fonction φ. D'après l'équa-

tion (5), on voit que la forme principale de φ satisfait aux $2r$ équations

$$[f_1, \varphi] = 0, \quad [f_2, \varphi] = 0, \ldots, \quad [f_{2r}, \varphi] = 0.$$

Si le nombre des équations (1) était impair, le déterminant des équations (4) serait nul, et ces équations incompatibles. C'est pour cette raison que nous avons supposé ce nombre pair.

13. Revenons à l'équation

$$(1) \qquad \frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \ldots + \frac{dq_n}{dt}\delta p_n - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \ldots - \frac{dp_n}{dt}\delta q_n = \delta \mathrm{H},$$

H étant une fonction des variables q_i, p_i que nous supposons liées par $2r$ équations conditionnelles

$$(2) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, \quad f_{2r} = 0.$$

En introduisant des multiplicateurs indéterminés $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2r}$, on déduit des équations (1) et (2)

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{d\mathrm{H}}{dp_1} + \lambda_1 \dfrac{df_1}{dp_1} + \lambda_2 \dfrac{df_2}{dp_1} + \ldots + \lambda_{2r} \dfrac{df_{2r}}{dp_1}, \\ \dfrac{dq_2}{dt} = \dfrac{d\mathrm{H}}{dp_2} + \lambda_1 \dfrac{df_1}{dp_2} + \lambda_2 \dfrac{df_2}{dp_2} + \ldots + \lambda_{2r} \dfrac{df_{2r}}{dp_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{cases}$$

$$(4) \qquad \begin{cases} -\dfrac{dp_1}{dt} = \dfrac{d\mathrm{H}}{dq_1} + \lambda_1 \dfrac{df_1}{dq_1} + \lambda_2 \dfrac{df_2}{dq_1} + \ldots + \lambda_{2r} \dfrac{df_{2r}}{dq_1}, \\ -\dfrac{dp_2}{dt} = \dfrac{d\mathrm{H}}{dq_2} + \lambda_1 \dfrac{df_1}{dq_2} + \lambda_2 \dfrac{df_2}{dq_2} + \ldots + \lambda_{2r} \dfrac{df_{2r}}{dq_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si l'on différentie une des équations (2) $f_i = 0$, on a

$$\frac{df_i}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{df_i}{dq_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{df_i}{dp_1}\frac{dp_1}{dt} + \frac{df_i}{dp_2}\frac{dp_2}{dt} + \ldots = 0;$$

et, en remplaçant les dérivées des q_i, p_i, d'après les équations (3) et (4), on a

$$[f_i, \mathrm{H}] + \lambda_1[f_i, f_1] + \lambda_2[f_i, f_2] + \ldots = 0;$$

on en conclut que les multiplicateurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ satisfont aux $2r$ équations suivantes :

$$\begin{array}{l} 0 + [f_2, f_1]\lambda_2 + [f_3, f_1]\lambda_3 + \ldots + [f_{2r}, f_1]\lambda_{2r} = [f_1, \mathrm{H}], \\ [f_1, f_2]\lambda_1 + 0 + [f_3, f_2]\lambda_3 + \ldots + [f_{2r}, f_2]\lambda_{2r} = [f_2, \mathrm{H}], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Or il résulte de ces équations que les seconds membres des équations (3) et (4) sont les dérivées principales de la fonction H, et, en les représentant au moyen des dérivées immédiates placées entre parenthèses, on a, au lieu des équations (3) et (4),

$$\begin{array}{l} \dfrac{dq_1}{dt} = \left(\dfrac{d\mathrm{H}}{dp_1}\right), \quad \dfrac{dq_2}{dt} = \left(\dfrac{d\mathrm{H}}{dp_2}\right), \quad \ldots, \quad \dfrac{dq_n}{dt} = \left(\dfrac{d\mathrm{H}}{dp_n}\right), \\ \dfrac{dp_1}{dt} = -\left(\dfrac{d\mathrm{H}}{dq_1}\right), \quad \dfrac{dp_2}{dt} = -\left(\dfrac{d\mathrm{H}}{dq_2}\right), \quad \ldots, \quad \dfrac{dp_n}{dt} = -\left(\dfrac{d\mathrm{H}}{dq_n}\right). \end{array}$$

Théorème sur la variation des constantes arbitraires.

14. Considérons les $2n$ équations

$$(1) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dp_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dq_i},$$

dans lesquelles H est une fonction quelconque des q_i, p_i et de t et i est susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, n$. Ces équations renferment celles de la Dynamique, mais elles sont plus générales; car, dans la Mécanique, H est assujetti à être la somme de deux fonctions, dont l'une ne renferme que les variables q_i et le temps t, et dont l'autre est homogène et du second degré par rapport aux variables p_i.

Supposons que l'on ait obtenu les valeurs des q_i, p_i qui dépendront de $2n$ constantes arbitraires et de t. Adoptons la caractéristique D pour désigner les accroissements des quantités q_i, p_i et de la fonction H quand ces constantes subissent de certaines variations.

Multiplions les équations (1) par $\mathrm{D}p_i$ et $-\mathrm{D}q_i$, ajoutons-les et som-

mons par rapport à i; nous aurons l'équation

(2) $$\sum_i (dq_i\,Dp_i - dp_i\,Dq_i) = DH\,dt,$$

qui est entièrement analogue à l'équation (1) du numéro précédent.

Désignons par Δ une caractéristique qui se rapporte à d'autres variations des constantes arbitraires, et différentions l'équation précédente selon Δ; nous aurons

$$\sum_i (d\Delta q_i\,Dp_i + dq_i\,\Delta Dp_i - d\Delta p_i\,Dq_i - dp_i\,\Delta Dq_i) = \Delta DH\,dt.$$

Nous obtiendrons une équation également vraie, si nous permutons les caractéristiques D et Δ

$$\sum_i (dDq_i\,\Delta p_i + dq_i\,D\Delta p_i - dDp_i\,\Delta q_i - dp_i\,D\Delta q_i) = D\Delta H\,dt.$$

Retranchons ces deux équations l'une de l'autre, en remarquant que les deux signes $D\Delta$ et ΔD sont équivalents, et nous obtenons

$$\sum_i d(\Delta q_i\,Dp_i - Dq_i\,\Delta p_i) = 0;$$

nous en concluons que

(3) $$\sum_i (\Delta q_i\,Dp_i - Dq_i\,\Delta p_i)$$

est indépendant du temps. C'est l'important théorème donné par Lagrange (*Mécanique analytique*, section V, § 1).

Si les variations selon Δ se rapportent à l'accroissement $\Delta\alpha$ d'une seule constante α et les variations selon D à l'accroissement $D\beta$ d'une autre constante β, le théorème de Lagrange exprime que la formule

$$\sum_i \left(\frac{dq_i}{d\alpha}\frac{dp_i}{d\beta} - \frac{dq_i}{d\beta}\frac{dp_i}{d\alpha}\right)$$

est indépendante du temps.

On peut généraliser le théorème précédent en supposant que les q_i, p_i satisfont à l'équation

$$(4)\qquad \frac{dq_1}{dt}\partial p_1 + \ldots + \frac{dq_n}{dt}\partial p_n - \frac{dp_1}{dt}\partial q_1 - \ldots - \frac{dp_n}{dt}\partial q_n = \partial H,$$

et que les variables q_i satisfont à des équations conditionnelles : alors le système de ces équations se rencontre aussi en Mécanique ; mais, pour généraliser encore davantage, supposons des équations conditionnelles qui renferment non-seulement les variables q_i, mais encore les variables p_i

$$f_1 = 0,\quad f_2 = 0,\ \ldots,\ f_{2r} = 0.$$

D'après ce que nous avons vu au n° **13**, nous serons conduits aux équations

$$\frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{dH}{dp_i}\right),\quad \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{dH}{dq_i}\right),$$

dont les seconds membres représentent les dérivées principales de la fonction H. Si l'on remarque que l'on a

$$\left(\frac{dH}{dq_1}\right)Dq_1 + \ldots + \left(\frac{dH}{dq_n}\right)Dq_n + \left(\frac{dH}{dp_1}\right)Dp_1 + \ldots + \left(\frac{dH}{dp_n}\right)Dp_n = DH,$$

on obtiendra encore l'équation (2) et, en suivant exactement la méthode exposée ci-dessus, on trouvera aussi que l'expression (3) est indépendante de t.

Sur la théorie des perturbations.

15. Supposons encore que les $2n$ variables q_i, p_i satisfassent à l'équation (4) et aux $2r$ équations conditionnelles

$$(1)\qquad f_1 = 0,\quad f_2 = 0,\ \ldots,\ f_{2r} = 0;$$

on en conclut les $2n$ équations

$$(2)\qquad \frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{dH}{dp_i}\right),\quad \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{dH}{dq_i}\right).$$

Les valeurs des q_i, p_i en fonction de t ne doivent contenir que $2(n-r)$ constantes arbitraires; représentons-les par

$$(3)\qquad \begin{cases} q_i = \varphi_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-2r}), \\ p_i = \psi_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-2r}). \end{cases}$$

Imaginons ensuite que H subisse un accroissement Ω et qu'on adopte encore pour formes des solutions les expressions (3), mais alors en considérant $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ comme des fonctions de t; on aura

$$\frac{dq_i}{dt} + \frac{dq_i}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{dq_i}{d\alpha_2}\frac{d\alpha_2}{dt} + \dots = \left(\frac{dH}{dp_i}\right) + \left(\frac{d\Omega}{dp_i}\right),$$

$$\frac{dp_i}{dt} + \frac{dp_i}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{dp_i}{d\alpha_2}\frac{d\alpha_2}{dt} + \dots = -\left(\frac{dH}{dq_i}\right) - \left(\frac{d\Omega}{dq_i}\right).$$

Retranchons les équations (2) des précédentes, et il en résulte

$$\frac{dq_i}{d\alpha_1}d\alpha_1 + \frac{dq_i}{d\alpha_2}d\alpha_2 + \dots = \left(\frac{d\Omega}{dp_i}\right)dt,$$

$$\frac{dp_i}{d\alpha_1}d\alpha_1 + \frac{dp_i}{d\alpha_2}d\alpha_2 + \dots = -\left(\frac{d\Omega}{dq_i}\right)dt.$$

Multiplions ces équations par $-\delta p_i$, δq_i, et sommons par rapport à i; nous aurons

$$(4)\qquad \delta\Omega = \sum_i \left(\frac{dq_i}{d\alpha_1}\delta p_i - \frac{dp_i}{d\alpha_1}\delta q_i\right)\frac{d\alpha_1}{dt} + \sum_i \left(\frac{dq_i}{d\alpha_2}\delta p_i - \frac{dp_i}{d\alpha_2}\delta q_i\right)\frac{d\alpha_2}{dt} + \dots$$

Comme les quantités α n'ont été supposées qu'en nombre égal à $2(n-r)$, elles ne sont liées par aucune équation conditionnelle; si donc on désigne par β une quelconque des quantités α, on aura

$$\frac{d\Omega}{d\beta} = \sum_i \left(\frac{dq_i}{d\alpha_1}\frac{dp_i}{d\beta} - \frac{dp_i}{d\alpha_1}\frac{dq_i}{d\beta}\right)\frac{d\alpha_1}{dt} + \sum_i \left(\frac{dq_i}{d\alpha_2}\frac{dp_i}{d\beta} - \frac{dp_i}{d\alpha_2}\frac{dq_i}{d\beta}\right)\frac{d\alpha_2}{dt} + \dots$$

Si l'on pose généralement

$$\sum_i \left(\frac{dq_i}{d\alpha}\frac{dp_i}{d\beta} - \frac{dp_i}{d\alpha}\frac{dq_i}{d\beta}\right) = [\alpha, \beta],$$

cette formule deviendra

$$\frac{d\Omega}{d\beta} = (\alpha_1, \beta)\frac{d\alpha_1}{dt} + (\alpha_2, \beta)\frac{d\alpha_2}{dt} + \dots$$

ou

$$(5) \qquad \frac{d\Omega}{d\beta} = \sum (\alpha_s, \beta)\frac{d\alpha_s}{dt}.$$

D'après ce que nous avons vu (n° **14**), les quantités (α, β) sont indépendantes de t. Si l'on suppose $r = 0$, cette équation devient la formule de perturbation de Lagrange; on voit donc que cette formule subsiste sans modifications par l'introduction des équations conditionnelles (1).

Si les fonctions α peuvent se partager en deux groupes de $n - r$ quantités $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-r}$, qui satisfont aux équations

$$(6) \qquad (\alpha_i, \alpha_k) = 0, \quad (\beta_i, \beta_k) = 0, \quad (\alpha_i, \beta_k) = 0, \quad (\alpha_i, \beta_i) = 1,$$

où i et k sont deux nombres différents, les $2(n-r)$ équations renfermées dans l'équation (5) deviennent

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{d\Omega}{d\beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{d\Omega}{d\alpha_i}.$$

16. Supposons ensuite que l'on intègre les $2n$ équations

$$\frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{dH}{dp_i}\right), \quad \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{dH}{dq_i}\right),$$

séparément des équations conditionnelles; alors les q_i, p_i ne renfermeront plus seulement $2(n-r)$ constantes arbitraires comme précédemment, mais elles s'exprimeront au moyen de t et de $2n$ constantes. Toutefois, le nombre des constantes arbitraires du problème doit se réduire à $2(n-r)$; on obtiendra les $2r$ relations qui lient les constantes trouvées en portant les expressions des q_i, p_i dans les équations (1); d'où l'on conclut que t doit s'y éliminer de lui-même.

Ainsi, au lieu des équations (3), nous devrons écrire

$$q_i = \varphi_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}),$$
$$p_i = \psi_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}),$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots$ étant liés par $2r$ équations conditionnelles.

Ce problème conduira encore à l'équation (4), que nous pouvons mettre sous cette forme

$$\delta\Omega = \sum_\alpha (\alpha, \alpha_1) \frac{d\alpha}{dt} \delta\alpha_1 + \sum_\alpha (\alpha, \alpha_2) \frac{d\alpha}{dt} \delta\alpha_2 + \ldots + \sum_\alpha (\alpha, \alpha_{2n}) \frac{d\alpha}{dt} \delta\alpha_{2n},$$

où le signe $\sum_\alpha$ s'étend à toutes les valeurs de α, qui sont $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$.

Dans le cas particulier où les fonctions α peuvent être partagées en deux groupes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, qui satisfont aux équations (6), on a

$$\begin{aligned}\delta\Omega = &- \frac{d\beta_1}{dt}\delta\alpha_1 - \frac{d\beta_2}{dt}\delta\alpha_2 - \ldots - \frac{d\beta_n}{dt}\delta\alpha_n \\ &+ \frac{d\alpha_1}{dt}\delta\beta_1 + \frac{d\alpha_2}{dt}\delta\beta_2 + \ldots + \frac{d\alpha_n}{dt}\delta\beta_n,\end{aligned}$$

et cette équation équivaut, comme on sait, aux équations

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \left(\frac{d\Omega}{d\beta_i}\right), \quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\left(\frac{d\Omega}{d\alpha_i}\right),$$

les dérivées principales de Ω par rapport aux quantités α et β étant prises d'après les $2r$ équations conditionnelles qui lient ces quantités.

17. Poisson a donné des formules de perturbation résolues par rapport aux dérivées des éléments troublés, dans le cas où les équations conditionnelles disparaissent; ces formules fournissent par conséquent la résolution des équations (5), par rapport aux dérivées des quantités α, lorsque r est nul. Mais ces formules cessent tout à fait d'être applicables, lorsqu'on suppose, entre les variables du problème, des équations conditionnelles; nous allons chercher les formules par lesquelles on les doit remplacer.

Supposons encore entre les $2n$ variables $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ les $2r$ équations finies

$$(7) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, \quad f_{2r} = 0,$$

et les équations différentielles

$$(8) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{dH}{dp_i}\right), \quad \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{dH}{dq_i}\right),$$

dans lesquelles i est susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, n$ et H peut renfermer t, outre les variables q_i, p_i.

Concevons que l'on ait intégré ces équations et que l'on ait trouvé pour intégrales les $2n - 2r$ équations

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \beta_1 &= \varphi_1(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t),\\ \beta_2 &= \varphi_2(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \beta_{2n-r} &= \varphi_{2n-r}(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t), \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2n-r}$ désignent des constantes arbitraires qui n'entrent pas dans les seconds membres.

Dans la Mécanique, si la fonction de forces ne dépend pas de t, H en est aussi indépendant, et alors on peut supposer que t ne se présente que dans une des équations (9), et additivement à la constante qui y entre.

Imaginons ensuite que l'on ait à résoudre le même problème dans lequel la fonction H est seulement remplacée par $\mathrm{H} + \Omega$, de sorte que Ω est la fonction perturbatrice, et Ω est en général une très-petite quantité. Les équations (7) subsistent encore, mais les équations (8) sont remplacées par

$$(10)\qquad \frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{d(\mathrm{H}+\Omega)}{dp_i}\right),\quad \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{d(\mathrm{H}+\Omega)}{dq_i}\right).$$

Alors les fonctions des q_i, p_i qui forment les seconds membres des équations (9) n'ont plus des valeurs constantes; mais leurs dérivées sont en général de très-petites quantités qu'il s'agit de déterminer.

Ces fonctions, que nous désignerons par la lettre β, sont définies par les équations (9), et ces équations, jointes aux $2r$ équations (7), pourraient servir à exprimer les $2n$ variables q_i, p_i, au moyen des quantités β et de t, et d'une seule manière.

Désignons par $\alpha = \varphi$ une intégrale du problème *sans perturbations* c'est-à-dire une des équations (9), dans laquelle α est la constante arbitraire. En différentiant cette équation, on a

$$0 = \sum_{i=1}^{i=n}\left[\frac{d\varphi}{dq_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{d\varphi}{dp_i}\left(\frac{dp_i}{dt}\right)\right] + \frac{d\varphi}{dt}$$

et le dernier terme est nul, si t ne se présente pas explicitement dans ψ: en ayant égard aux équations (8), on obtient

$$(11) \qquad 0 = \sum_{i=1}^{i=n}\left[\frac{d\psi}{dq_i}\left(\frac{dH}{dp_i}\right) - \frac{d\psi}{dp_i}\left(\frac{dH}{dq_i}\right)\right] + \frac{d\psi}{dt}.$$

Passons ensuite au problème *avec perturbations*, nous devrons alors regarder, dans l'équation $\alpha = \psi$, α comme une fonction de t, et, en la différentiant, nous aurons

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\psi}{dq_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{d\psi}{dp_i}\frac{dp_i}{dt}\right) + \frac{d\psi}{dt},$$

les dérivées des variables q_i p_i étant fournies par les équations (10), et il en résulte

$$(12) \qquad \frac{d\alpha}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n}\left[\frac{d\psi}{dq_i}\left(\frac{d(H+\Omega)}{dp_i}\right) - \frac{d\psi}{dp_i}\left(\frac{d(H+\Omega)}{dq_i}\right)\right] + \frac{d\psi}{dt}.$$

Retranchons les deux dernières équations l'une de l'autre, et, dans le résultat, mettons la lettre α au lieu de ψ, ce qui ne pourra plus maintenant entraîner de confusion, et nous avons

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum\left[\frac{d\alpha}{dq_i}\left(\frac{d\Omega}{dp_i}\right) - \frac{d\alpha}{dp_i}\left(\frac{d\Omega}{dq_i}\right)\right].$$

La fonction Ω peut s'exprimer au moyen des quantités β et de t, et d'une seule manière, et, d'après une propriété démontrée dans mon Mémoire sur les dérivées principales (*Bulletin de la Société mathématique*, t. I, p. 164), les dérivées principales de Ω par rapport aux variables q_i p_i sont données par les formules

$$\left(\frac{d\Omega}{dq_i}\right) = \sum \frac{d\Omega}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right), \qquad \left(\frac{d\Omega}{dp_i}\right) = \sum \frac{d\Omega}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dp_i}\right);$$

on a donc

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum \frac{d\Omega}{d\beta}\sum_{i=1}^{i=n}\left[\frac{d\alpha}{dq_i}\left(\frac{d\beta}{dp_i}\right) - \frac{d\alpha}{dp_i}\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right)\right].$$

On a d'ailleurs

$$\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right) = \frac{d\beta}{dq_i} + \mu_1(\beta)\frac{df_1}{dq_i} + \mu_2(\beta)\frac{df_2}{dq_i} + \ldots + \mu_{2r}(\beta)\frac{df_{2r}}{dq_i},$$

$$\left(\frac{d\beta}{dp_i}\right) = \frac{d\beta}{dp_i} + \mu_1(\beta)\frac{df_1}{dp_i} + \mu_2(\beta)\frac{df_2}{dp_i} + \ldots + \mu_{2r}(\beta)\frac{df_{2r}}{dp_i},$$

en prenant pour $\mu_1(\beta)$, $\mu_2(\beta)$, ... les quantités qui satisfont aux $2r$ équations

$$\begin{array}{l} \quad\quad\quad\quad\;\; [f_2, f_1]\mu_2(\beta) + [f_3, f_1]\mu_3(\beta) + \ldots + [f_{2r}, f_1]\mu_{2r}(\beta) = [f_1, \beta], \\ [f_1, f_2]\mu_1(\beta) \quad\quad\quad\quad\;\; + [f_3, f_2]\mu_3(\beta) + \ldots + [f_{2r}, f_2]\mu_{2r}(\beta) = [f_2, \beta], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

En remplaçant les dérivées principales des quantités β par les expressions ci-dessus, on a enfin

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum \frac{d\Omega}{d\beta}\{[\alpha, \beta] + \mu_1(\beta)[\alpha, f_1] + \mu_2(\beta)[\alpha, f_2] + \ldots + \mu_{2r}(\beta)[\alpha, f_{2r}]\},$$

qui est la formule cherchée.

Cette dernière formule peut être considérée comme provenant de la résolution des équations (5) par rapport aux dérivées des éléments troublés; donc, puisque les quantités (α, β) sont indépendantes du temps t, il en est de même de l'expression

$$[\alpha, \beta] + \mu_1(\beta)[\alpha, f_1] + \mu_2(\beta)[\alpha, f_2] + \ldots.$$

La formule de perturbation que je viens de donner est évidemment exacte, quelles que soient les limites dans lesquelles Ω puisse varier; mais si Ω reste toujours très-petit ainsi que ses dérivées, les quantités $\frac{d\alpha}{dt}$ seront elles-mêmes très-petites, les quantités α varieront très-peu, et l'on aura une valeur approchée d'une des quantités α par une quadrature, en regardant le coefficient de $\frac{d\Omega}{d\beta}$ comme constant, et en ne regardant comme variable, dans Ω qui est fonction des α et de t, que la quantité t

Théorème relatif à l'intégration d'un système d'équations précédemment considéré.

18. Supposons entre les $2n$ variables q_i, p_i l'équation

$$(a)\qquad \frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \ldots + \frac{dq_n}{dt}\delta p_n - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \ldots - \frac{dp_n}{dt}\delta q_n = \delta H,$$

et les équations conditionnelles

$$(b)\qquad f_1 = 0,\quad f_2 = 0,\ldots,\quad f_{2r} = 0.$$

Nous avons démontré (nº 8) qu'on peut remplacer les $2n$ variables q_i, p_i par $2n-2r$ variables $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-r}, P_1, P_2, \ldots, P_{n-r}$ indépendantes entre elles, et qui satisfont aux $2n-2r$ équations différentielles canoniques renfermées dans les deux équations

$$(1)\qquad \frac{dQ_i}{dt} = \frac{dH}{dP_i},\quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{dH}{dQ_i},$$

où i est susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, n-r$.

La quantité $[\alpha, \beta]$ est formée avec les dérivées de α et β par rapport aux variables q_i, p_i; formons une quantité qui se compose de la même manière, au moyen des dérivées de α et β par rapport aux variables Q_i, P_i, et posons

$$[\alpha, \beta]' = \frac{d\alpha}{dQ_1}\frac{d\beta}{dP_1} + \frac{d\alpha}{dQ_2}\frac{d\beta}{dP_2} + \ldots + \frac{d\alpha}{dQ_{n-r}}\frac{d\beta}{dP_{n-r}}$$
$$- \frac{d\alpha}{dP_1}\frac{d\beta}{dQ_1} - \frac{d\alpha}{dP_2}\frac{d\beta}{dQ_2} - \ldots - \frac{d\alpha}{dP_{n-r}}\frac{d\beta}{dQ_{n-r}}.$$

Comme il n'existe pas d'équations conditionnelles entre les variables Q_i, P_i, la formule de perturbation du numéro précédent par l'emploi de ces variables se change en la suivante :

$$(2)\qquad \frac{d\alpha}{dt} = \sum_{\beta} \frac{d\Omega}{d\beta}[\alpha, \beta]'.$$

Les coefficients des dérivées de Ω doivent être les mêmes dans les deux formules, et l'on en conclut

$$(3)\quad [\alpha,\beta]' = [\alpha,\beta] - \alpha_1(\beta)[\alpha, f_1] - \alpha_2(\beta)[\alpha, f_2] - \ldots - \alpha_{2r}(\beta)[\alpha, f_{2r}].$$

D'après le célèbre théorème de Poisson, si

$$\alpha = \text{const.},\quad \beta = \text{const.}$$

sont deux intégrales du système d'équations canoniques (1), alors la formule

$$(4)\qquad [\alpha,\beta]' = \text{const.}$$

est également une intégrale de ces équations, à moins que le premier membre ne soit identiquement constant.

Ce théorème provient d'ailleurs de ce que, dans la formule (2), les coefficients des dérivées de Ω sont indépendants de t, ainsi qu'on en a fait la remarque à la fin du n° **17**.

Si des variables Q_i, P_i on revient aux variables q_i, p_i, on obtient le théorème suivant :

Théorème. — *Supposons que*

$$\alpha = \text{const.},\quad \beta = \text{const.}$$

soient deux intégrales du système des équations

$$f_1 = 0,\quad f_2 = 0,\quad \ldots,\quad f_{2r} = 0,$$

$$\frac{dq_1}{dt} = \left(\frac{dH}{dp_1}\right),\quad \frac{dq_2}{dt} = \left(\frac{dH}{dp_2}\right),\quad \ldots,\quad \frac{dq_n}{dt} = \left(\frac{dH}{dp_n}\right),$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\left(\frac{dH}{dq_1}\right),\quad \frac{dp_2}{dt} = -\left(\frac{dH}{dq_2}\right),\quad \ldots,\quad \frac{dp_n}{dt} = -\left(\frac{dH}{dq_n}\right),$$

alors l'équation

$$[\alpha,\beta] - \alpha_1(\beta)[\alpha, f_1] - \ldots - \alpha_{2r}(\beta)[\alpha, f_{2r}] = \text{const.}$$

sera aussi une intégrale de ce système d'équations, à moins que le premier membre ne soit identiquement constant.

Ce qui augmente l'importance de ce théorème, c'est que le passage des variables q_i, p_i aux variables Q_i, P_i ne peut se faire que par des opérations très-difficiles du Calcul intégral, de sorte qu'il ne serait pas commode d'appliquer la formule (4).

Le théorème précédent n'est qu'un corollaire de la formule (3); j'ai déjà fait remarquer ailleurs que la formule (3) avait été donnée par Jacobi dans le cas où les équations conditionnelles ne renferment que les variables q_i, et alors cette formule prend une forme toute différente et plus compliquée. Dans ce cas, en effet, en désignant, comme au nº **10**, par

$$f_1 = 0,\quad f_2 = 0,\quad \ldots,\quad f_r = 0$$

les équations de condition données, il faut faire, dans la formule (3),

$$f_{r+1} = [f_1, \mathrm{H}],\quad f_{r+2} = [f_2, \mathrm{H}],\quad \ldots,\quad f_{2r} = [f_r, \mathrm{H}].$$

Il convient aussi de faire observer que la formule que Jacobi a démontrée s'appuie sur une transformation particulière des variables q_i, p_i en les variables Q_i, P_i, ce qui l'oblige à donner deux pages entières à l'énoncé de son problème (*Nova Methodus*, § 38, *OEuvres*, t. III). Dans mon théorème, au contraire, la transformation des q_i, p_i en les Q_i, P_i se faisant dans un système canonique quelconque, son énoncé est très-simple. On pourrait encore faire remarquer que la transformation, adoptée par Jacobi, des variables q_i, p_i dans les variables Q_i, P_i, n'est pas applicable à l'équation

$$\frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \ldots + \frac{dq_n}{dt}\delta p_n - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \ldots - \frac{dp_n}{dt}\delta p_n = \delta \mathrm{H}$$

prise dans toute sa généralité; elle s'appuie essentiellement sur la forme particulière qu'elle prend dans la Dynamique, où H se compose de la somme d'une fonction $-$ U qui ne renferme que les variables q_i, et d'une fonction T des p_i, q_i, qui est homogène et du second degré par rapport aux variables p_i. Toutefois on peut reconnaître que, par les considérations du § 49 du Mémoire de Jacobi, on peut s'affranchir de cette dernière restriction.

On voit, d'après ces réflexions, en combien de manières la formule (3) est généralisée, de sorte que je crois pouvoir dire que le théorème renfermé dans cette formule était entièrement nouveau, lorsque je l'ai énoncé pour la première fois (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1873, t. LXVI, p. 1193).

Propriétés de l'expression $[\alpha, \beta]$.

19. Nous avons vu dans le n° **18** que les $2n$ variables q_i, p_i, qui satisfont aux équations (a) et (b), peuvent être remplacées par $2(n-r)$ variables Q_i, P_i fonctions des premières, et qui satisfont à un système de $2(n-r)$ équations différentielles canoniques, et que, en posant

$$[\alpha, \beta] = \sum_{i=1}^{n-r} \left(\frac{d\alpha}{dQ_i}\frac{d\beta}{dP_i} - \frac{d\alpha}{dP_i}\frac{d\beta}{dQ_i} \right),$$

on a la formule

$$(1) \qquad [\alpha, \beta] = |\alpha, \beta| + \mu_1 [\beta] [\alpha, f_1] + \ldots + \mu_{2r} [\beta] [\alpha, f_{2r}].$$

Il importe de démontrer que, dans cette formule, α et β peuvent être considérés comme deux fonctions quelconques des variables Q_i, P_i ou q_i, p_i; en sorte que cette formule servira à remplacer l'expression $[\alpha, \beta]$, où α et β sont deux fonctions quelconques des variables Q_i, P_i par une autre expression qui ne renferme que les variables q_i, p_i.

En effet, dans la théorie exposée ci-dessus,

$$(2) \qquad \alpha = \text{const.}, \quad \beta = \text{const.}$$

étaient deux intégrales du système canonique renfermé dans les équations

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{dH}{dP_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{dH}{dQ_i},$$

où i est susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, n-r$. On a donc, en diffé-

rentiant les équations (2),

$$(3) \qquad [\alpha, H]' + \frac{d\alpha}{dt} = 0, \quad [\beta, H]' + \frac{d\beta}{dt} = 0.$$

Ainsi la théorie précédente suppose qu'on peut trouver une fonction H qui satisfasse à ces deux équations ; ce qui limite les fonctions qu'on peut prendre pour α et β. Mais imaginons que l'on ait obtenu la formule qui donne l'expression $[\alpha, \beta]'$ au moyen des variables q_i, p_i, lorsque α et β sont deux fonctions quelconques. Les variables q_i, p_i sont des fonctions des variables Q_i, P_i qui ne dépendent pas de la fonction H, ni de t, ainsi qu'on peut s'en assurer par le n° **8**; pareillement, la formule considérée qui donne $[\alpha, \beta]'$ est indépendante de H. Si donc on suppose ensuite que, dans cette formule, α et β satisfassent aux équations (3), il ne s'ensuivra aucune réduction; donc, réciproquement, la formule (1) trouvée, dans la supposition que les équations (3) sont satisfaites, peut être étendue à deux fonctions quelconques.

20. Au lieu de la fonction donnée pour α, mettons dans la formule (1) l'expression

$$(\alpha) = \alpha + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_{2r} f_{2r},$$

en choisissant pour $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ les multiplicateurs qui donnent à α sa forme principale. D'après ce que nous avons vu au n° **12**, on a

$$[(\alpha), f_1] = 0, \quad [(\alpha), f_2] = 0, \quad [(\alpha), f_{2r}] = 0.$$

Donc tous les termes qui suivent le premier dans le second membre de la formule (1) s'annulent, et l'on a

$$(4) \qquad [\alpha, \beta]' = [\alpha + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_{2r} f_{2r}, \beta].$$

Il est évident que je n'ai pas à mettre (α) au lieu de α dans le premier membre; car α, dans ce premier membre, est exprimé au moyen des variables Q_i, P_i, ce qui ne peut avoir lieu que d'une seule manière.

De même, si β a sa forme principale, on a

$$\mu_1(\beta) = 0, \quad \mu_2(\beta) = 0, \quad \ldots, \quad \mu_m(\beta) = 0,$$

et l'on conclut encore de la formule (1)

$$[\alpha, \beta] = [\alpha, (\beta)]$$

ou

$$(5) \quad [\alpha, \beta] = [\alpha, (\beta)] + \mu_1(\beta) f_1 + \mu_2(\beta) f_2 + \ldots + \mu_m(\beta) f_m.$$

Cette dernière formule se vérifie très-aisément; car, en la développant, on obtient

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta] = [\alpha, (\beta)] &+ \mu_1(\beta)[\alpha, f_1] + \mu_2(\beta)[\alpha, f_2] + \ldots \\ &+ [\alpha, \mu_1(\beta)] f_1 + [\alpha, \mu_2(\beta)] f_2 + \ldots, \end{aligned}$$

et comme $f_1, f_2, \ldots$ sont nuls, on retrouve l'équation (1).

Aux formules (4) et (5) on peut évidemment ajouter cette autre

$$[\alpha, \beta] = [(\alpha), (\beta)] = [\alpha - \lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2 - \ldots, \ \beta - \mu_1 f_1 - \mu_2 f_2 - \ldots],$$

et cette dernière revient encore à la suivante, qui est formée au moyen des dérivées principales de α et de β,

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta]' = \left(\frac{d\alpha}{dq_1}\right)\left(\frac{d\beta}{dp_1}\right) &+ \left(\frac{d\alpha}{dq_2}\right)\left(\frac{d\beta}{dp_2}\right) + \ldots \\ &- \left(\frac{d\alpha}{dp_1}\right)\left(\frac{d\beta}{dq_1}\right) - \left(\frac{d\alpha}{dp_2}\right)\left(\frac{d\beta}{dq_2}\right) - \ldots. \end{aligned}$$

Les formules (4) et (5) montrent que l'on peut modifier les formes des fonctions α et β, d'après les équations conditionnelles, de manière à rendre l'expression $[\alpha, \beta]$ indépendante du choix des variables q_i, p_i. On peut voir, d'après mon Mémoire sur les dérivées principales, qu'il existe, pour les expressions de α et β, d'autres formes qui conduisent également à ce but. Toutefois, je considère les précédentes formules comme les plus simples et les plus curieuses.

21. Dans le n° **15**, nous avons trouvé la formule de perturbation

$$\frac{d\Omega}{d\beta} = \sum (\alpha_s, \beta) \frac{d\alpha_s}{dt},$$

en posant

$$(6) \qquad (\alpha_s, \beta) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{dq_i}{d\alpha_s} \frac{dp_i}{d\beta} - \frac{dp_i}{d\alpha_s} \frac{dq_i}{d\beta} \right).$$

Si l'on suppose que les variables q_i, p_i soient transformées en les variables Q_i, P_i, le coefficient de $\frac{d\alpha}{dt}$ est généralement remplacé dans cette formule par

$$(7) \qquad (\alpha_s, \beta)' = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{dQ_i}{d\alpha_s} \frac{dP_i}{d\beta} - \frac{dP_i}{d\alpha_s} \frac{dQ_i}{d\beta} \right).$$

On en conclut que les deux dernières expressions sont égales, et qu'on a

$$(\alpha_s, \beta)' = (\alpha_s, \beta).$$

Je terminerai en démontrant cette formule, où n'entrent que les variables q_i, p_i, supposées assujetties à des équations conditionnelles :

$$[\alpha_i, \alpha_1]'(\alpha_1, \alpha_k) + [\alpha_i, \alpha_2]'(\alpha_2, \alpha_k) + \ldots + [\alpha_i, \alpha_{2n-r}]'(\alpha_{2n-r}, \alpha_k)$$

$= 0$ si i est différent de k,

$= -1$ si $i = k$,

les premiers facteurs des termes du premier membre étant donnés par la formule

$$(8) \qquad [\alpha_i, \alpha_s]' = \sum_{u=1}^{u=n} \left[\left(\frac{d\alpha_i}{dq_u}\right) \left(\frac{d\alpha_s}{dp_u}\right) - \left(\frac{d\alpha_i}{dp_u}\right) \left(\frac{d\alpha_s}{dq_u}\right) \right],$$

et les seconds facteurs étant formés d'après la formule (6).

En effet, d'après une formule connue, on a, en exprimant les $2(n-1)$ fonctions z, au moyen des variables Q_i, P_i,

$$(z_i, z_1)'(z_1, z_k) + (z_i, z_2)'(z_2, z_k) + \dots + (z_i, z_{2n-2})'(z_{2n-2}, z_k)$$

$= 0$ si i est différent de k.

$= -1$ si $i = k$,

en posant

$$(9) \qquad (z_i, z_s)' = \sum \left(\frac{dz_i}{dQ_u} \frac{dz_s}{dP_u} - \frac{dz_i}{dP_u} \frac{dz_s}{dQ_u} \right),$$

et $(z_s, z_k)'$ étant formé d'après la formule (7).

Or on a

$$(z_s, z_k)' = (z_s, z_k),$$

et les deux expressions (8) et (9) sont équivalentes. On en conclut la formule à démontrer.

Sur les surfaces isothermes paraboloïdales;

Par M. G. LAMÉ [*].

Dans mon Mémoire sur les surfaces orthogonales toutes isothermes[**], j'ai fait voir que le système paraboloïdal n'était qu'un cas particulier des surfaces orthogonales et isothermes du second ordre : mais il ne sera pas inutile de rechercher directement ce système, afin d'éclaircir, par un nouvel exemple, la méthode générale que j'ai indiquée pour résoudre des questions de cette nature.

Soit donc proposé de trouver les surfaces isothermes comprises dans l'équation

$$(1) \qquad 2lx + my^2 + nz^2 = 1,$$

laquelle s'étend à tous les paraboloïdes, tant elliptiques qu'hyperboliques.

Le problème d'Analyse qu'il s'agit de résoudre consiste à regarder les coefficients l, m, n comme des fonctions inconnues d'un paramètre λ, et à déterminer ces fonctions par la condition que le quotient

$$(2) \qquad \frac{\dfrac{d^2\lambda}{dx^2} + \dfrac{d^2\lambda}{dy^2} + \dfrac{d^2\lambda}{dz^2}}{\left(\dfrac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\dfrac{d\lambda}{dz}\right)^2}$$

---

[*] Ce Mémoire de mon savant ami et regretté confrère doit remonter à l'année 1843 ou au moins à 1844. J'ignore par quelle suite de circonstances il a été retardé à l'impression, puis négligé et comme oublié par son illustre auteur, qui n'est mort que longtemps après, en 1870. Enfin il se retrouve aujourd'hui, et je m'empresse de le communiquer au public, car on le lira encore avec plaisir et avec profit. Lamé possédait un talent très-pénétrant, d'un genre tout particulier, et en ce sens on peut dire qu'il n'a pas été remplacé jusqu'ici. (J. LIOUVILLE.)

[**] Lu à l'Académie des Sciences, le 21 août 1843, et imprimé la même année dans le *Journal de Mathématiques*, t. VIII, p. 397; *voir* aussi p. 515.

soit exprimable en λ seul, lorsque, considérant à la fois toutes les surfaces comprises dans l'équation (1), ce paramètre λ devient une fonction de x, y, z, donnée par cette même équation.

Désignons par L le premier membre de l'équation (1); posons pour simplifier

$$(3)\qquad l^2 + m^2 y^2 + n^2 z^2 = \mathrm{M};$$

enfin employons une notation connue, en représentant par la même lettre accentuée une ou deux fois (F′, F″) les dérivées première et seconde de toute fonction (F) de λ, prises par rapport à ce paramètre seul. On déduit de l'équation (1), par des différentiations successives et l'élimination,

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{L}'^2\left[\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right] = 4\mathrm{M},\\ &\mathrm{L}'^3\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2}\right) = 4\left(\mathrm{M}'\mathrm{L}' - \mathrm{M}\mathrm{L}'' + \frac{m+n}{2}\mathrm{L}'^2\right), \end{aligned}\right.$$

d'où l'on conclut pour le rapport (2)

$$\frac{\mathrm{M}'\mathrm{L}' - \mathrm{M}\mathrm{L}'' + \frac{m+n}{2}\mathrm{L}'^2}{\mathrm{M}\mathrm{L}'},$$

ce qui réduit le problème proposé à faire en sorte que l'équation

$$(5)\qquad \frac{\mathrm{M}'\mathrm{L}' - \mathrm{M}\mathrm{L}'' + \frac{m+n}{2}\mathrm{L}'^2}{\mathrm{M}\mathrm{L}'} = \frac{\varphi''}{\varphi'},$$

dans laquelle φ ne contient que λ, soit vérifiée en même temps que l'équation (1), ou $\mathrm{L} = 1$.

La question se simplifie encore si l'on élimine x entre les équations (1) et (5). En effet, en posant

$$(6)\qquad l - (lm' - l'm)y^2 - (ln' - l'n)z^2 = \mathrm{N},$$

la valeur de x tirée de l'équation (1) donne

$$l\mathrm{L}' = \mathrm{N},\quad l\mathrm{L}'' = \mathrm{N}'.$$

et l'équation (5) devient

$$(7)\qquad M'N\varphi - MN'\varphi + N\varphi' - \frac{m+n}{2l}\varphi N^2 = 0.$$

Or cette équation finale doit être identique, quelles que soient les deux seules variables indépendantes y et z actuellement présentes. Donc, pour trouver les familles de surfaces isothermes comprises dans la formule (1), il suffit de chercher les fonctions l, m, n, φ de λ qui peuvent vérifier l'équation (7), quels que soient y et z.

Le premier membre de cette équation (7) se présente sous la forme d'un polynôme du quatrième degré, à puissances paires de y et z; mais il se réduit au second degré seulement si l'on pose

$$(8)\qquad \frac{l'}{l} = \frac{m'}{m} = \frac{n'}{n},$$

car N (6) se réduit à l', et N' à l''. Les équations (8) donnent par l'intégration

$$(9)\qquad l = \alpha\psi,\quad m = \beta\psi,\quad n = \gamma\psi,$$

ψ étant une fonction de λ; α, β, γ des constantes; d'où l'on conclut

$$(10)\qquad \begin{cases} M = \psi^2 F, \quad M' = 2\psi\psi' F, \\ F = \alpha^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2. \end{cases}$$

Toutes ces valeurs, substituées dans l'équation (7), la transforment ainsi

$$(11)\qquad \frac{d\frac{\psi'}{\varphi\psi}}{d\lambda}(\alpha^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2) = \frac{\beta+\gamma}{2\varphi},$$

et pour que cette équation soit vérifiée, quels que soient y et z, il faut que l'on ait

$$(12)\qquad \frac{d\frac{\psi'}{\varphi\psi}}{d\lambda} = 0,\quad \gamma = -\beta.$$

Rien n'empêche de prendre $\psi = \frac{1}{\lambda}$ et φ constant, pour satisfaire à la

première équation (12) ; la formule (1) devient alors

$$(13)\qquad 2\alpha x + \beta(y^2 - z^2) = \lambda,$$

et représente une famille isolée de paraboloïdes hyperboliques, qui sont évidemment isothermes, puisque la fonction λ (13) satisfait à l'équation

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2} = 0.$$

Cherchons maintenant à vérifier l'équation (7) sans poser les relations (8). Comme cette vérification doit avoir lieu indépendamment des coordonnées y et z, on peut les supposer constantes quand λ varie, et écrire l'équation (7) de cette manière :

$$(14)\qquad \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{M}{N\varphi}\right] = \frac{m+n}{2l\varphi},$$

c'est-à-dire que le problème proposé sera résolu si l'on fait en sorte que la fraction

$$(15)\qquad \frac{N}{M} \text{ ou } \frac{l + (lm' - ml')y^2 + (ln' - nl')z^2}{l' + m'y^2 + n'z^2}$$

se réduise identiquement à une fonction ψ de λ seul ; car l'équation (14) deviendra

$$(16)\qquad \varphi\frac{d\frac{1}{\varphi\psi}}{d\lambda} = \frac{m+n}{2l},$$

et servira à déterminer la fonction φ.

Pour que la fraction (15) soit indépendante de y et de z, il faut et il suffit que

$$(17)\qquad \frac{d\frac{1}{l}}{d\lambda} = \frac{d\frac{l}{m}}{d\lambda} = \frac{d\frac{l}{n}}{d\lambda};$$

or rien n'empêche de prendre pour le paramètre λ la fonction $\frac{1}{l}$, d'où

$l = \frac{1}{\lambda}$, et les équations (17) donneront, par l'intégration

$$(18) \qquad l = \frac{1}{\lambda}, \quad m = \frac{1}{\lambda(\lambda - \beta)}, \quad n = \frac{1}{\lambda(\lambda - \gamma)},$$

β et γ étant des constantes différentes.

On aura alors $\psi = \frac{l'}{l^2} = -1$, et l'équation (16) deviendra, par la substitution des valeurs de l, m, n, ψ,

$$(19) \qquad \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda - \beta} + \frac{1}{\lambda - \gamma}\right),$$

équation dont l'intégration donnera

$$(20) \quad \varphi = \sqrt{\lambda - \beta}\sqrt{\lambda - \gamma}, \text{ ou } \varphi = \sqrt{\lambda - \beta}\sqrt{\gamma - \lambda}, \text{ ou } \varphi = \sqrt{\beta - \lambda}\sqrt{\gamma - \lambda},$$

suivant que λ surpassera γ plus grand que β, ou sera compris entre γ et β, ou enfin sera moindre que β.

Ces trois cas différents conduisent aux familles conjuguées des paraboloïdes, représentées par les équations

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{2x}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda(\lambda - \beta)} + \frac{z^2}{\lambda(\lambda - \gamma)} = 1, \\ &\frac{2x}{\lambda_1} + \frac{y^2}{\lambda_1(\lambda_1 - \beta)} - \frac{z^2}{\lambda_1(\gamma - \lambda_1)} = 1, \\ &\frac{2x}{\lambda_2} - \frac{y^2}{\lambda_2(\beta - \lambda_2)} - \frac{z^2}{\lambda_2(\gamma - \lambda_2)} = 1, \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles on a $\lambda > \gamma > \lambda_1 > \beta > \lambda_2 > 0$.

La fonction φ étant déterminée, on sait que la température est exprimée par le binôme $\left(A\int\frac{d\lambda}{\varphi} + B\right)$, A et B étant constants; si donc on représente par ε, ε_1, ε_2, l'intégrale $\int\frac{d\lambda}{\varphi}$, prise entre telles limites que l'on jugera convenable, pour les trois familles (21), on pourra poser, d'après les valeurs (20) de φ,

$$(22) \quad \varepsilon = \int_\gamma^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda - \beta}\sqrt{\lambda - \gamma}}, \quad \varepsilon_1 = \int_\beta^{\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1 - \beta}\sqrt{\gamma - \lambda_1}}, \quad \varepsilon_2 = \int_{\lambda_2}^{\beta} \frac{d\lambda_2}{\sqrt{\beta - \lambda_2}\sqrt{\gamma - \lambda_2}}.$$

et la température sera une fonction linéaire de ε, ou ε_1, ou ε_2, suivant le système de surfaces isothermes (21) que l'on aura en vue.

Les intégrales (22) peuvent s'obtenir par les méthodes connues, et l'on trouve que les fonctions λ de ε, λ_1 de ε_1, λ_2 de ε_2 se mettent sous la forme

$$(23)\quad \begin{cases} \lambda = \left(\dfrac{\gamma+\beta}{2}\right) + \left(\dfrac{\gamma-\beta}{2}\right)\left(\dfrac{e^{\varepsilon}+e^{-\varepsilon}}{2}\right), \\ \lambda_1 = \left(\dfrac{\gamma+\beta}{2}\right) + \left(\dfrac{\gamma-\beta}{2}\right)\cos\varepsilon_1, \\ \lambda_2 = \left(\dfrac{\gamma+\beta}{2}\right) - \left(\dfrac{\gamma-\beta}{2}\right)\left(\dfrac{e^{\varepsilon_2}+e^{-\varepsilon_2}}{2}\right). \end{cases}$$

On pourrait, au lieu de λ, λ_1, λ_2, prendre pour paramètres des surfaces (21) les transcendantes ε, ε_1, ε_2. Les limites de ces nouveaux paramètres sont, pour ε, zéro et l'infini; pour ε_1, zéro et π; pour ε_2, zéro et l'intégrale complète

$$(24)\qquad \varpi = \int_0^{\beta} \frac{d\lambda}{\sqrt{\beta-\lambda}\,\sqrt{\gamma-\lambda}},$$

qui est telle que l'on a

$$(25)\qquad \frac{e^{\varpi}+e^{-\varpi}}{2} = \frac{\gamma+\beta}{\gamma-\beta}.$$

On remarquera que les limites supérieures et inférieures se correspondent pour λ et ε, pour λ_1 et ε_1; mais qu'il y a réciprocité entre l'ordre de ces limites pour λ_2 et ε_2.

Les valeurs de x, y, z, en λ, λ_1, λ_2, obtenues par l'élimination à l'aide des trois équations (21), conduisent aux relations suivantes :

$$(26)\quad \begin{cases} 2x = \lambda + \lambda_1 + \lambda_2 - \beta - \gamma, \\ y\sqrt{\gamma-\beta} = \sqrt{\lambda-\beta}\,\sqrt{\lambda_1-\beta}\,\sqrt{\beta-\lambda_2}, \\ z\sqrt{\gamma-\beta} = \sqrt{\lambda-\gamma}\,\sqrt{\gamma-\lambda_1}\,\sqrt{\gamma-\lambda_2}. \end{cases}$$

Ces valeurs vérifient les équations

$$1 + \frac{y^2}{(\lambda - \beta)(\lambda_1 - \beta)} - \frac{z^2}{(\lambda - \gamma)(\gamma - \lambda_1)} = 0,$$

$$1 + \frac{y^2}{(\lambda - \beta)(\beta - \lambda_2)} + \frac{z^2}{(\lambda - \gamma)(\gamma - \lambda_2)} = 0,$$

$$1 - \frac{y^2}{(\lambda_1 - \beta)(\beta - \lambda_2)} + \frac{z^2}{(\gamma - \lambda_1)(\gamma - \lambda_2)} = 0,$$

lesquelles expriment que les trois systèmes de surfaces (21) se coupent à angle droit.

La première et la troisième des équations (21), aux paramètres λ et λ_2, représentent des paraboloïdes ayant leurs axes principaux sur la même droite, qui est l'axe des x, mais en sens opposés; quant à la famille au paramètre λ_1, elle se compose de paraboloïdes hyperboliques. Si l'on fait $z = 0$ dans les équations (21), on trouve, pour les équations des courbes d'intersection par le plan des xy,

$$\lambda - \frac{\beta}{2} - x = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{\beta}{2}\right)^2},$$

$$\lambda_1 - \frac{\beta}{2} - x = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{\beta}{2}\right)^2},$$

$$x + \frac{\beta}{2} - \lambda_2 = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{\beta}{2}\right)^2};$$

c'est-à-dire que ces sections principales sont des paraboles ayant toutes pour foyer le point B, dont les coordonnées sont

$$z = 0, \quad y = 0, \quad x = \frac{\beta}{2}.$$

Pareillement, si l'on fait $y = 0$ dans les équations (21), on trouve, pour les équations des traces sur le plan des zx,

$$\lambda - \frac{\gamma}{2} - x = \sqrt{z^2 + \left(x - \frac{\gamma}{2}\right)^2},$$

$$x + \frac{\gamma}{2} - \lambda_1 = \sqrt{z^2 + \left(x - \frac{\gamma}{2}\right)^2},$$

$$x + \frac{\gamma}{2} - \lambda_2 = \sqrt{z^2 + \left(x - \frac{\gamma}{2}\right)^2};$$

c'est-à-dire que ces sections principales sont des paraboles, ayant toutes pour foyer le point C, dont les coordonnées sont

$$y = 0, \quad z = 0, \quad x = \frac{\gamma}{2}.$$

Le paraboloïde elliptique de la famille ε_2, qui correspond à $\varepsilon_2 = \varpi/2$ (4), ou à $\lambda_2 = 0$, a pour équation

(27) $$\frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 2x;$$

son sommet est à l'origine A, et il enveloppe tous les autres paraboloïdes de la même famille. Celui qui correspond à la valeur zéro de ε_2, ou $\lambda_2 = \beta$, devient une aire plane, sur le plan des zx, ou $y = 0$, limitée extérieurement par la parabole ayant, sur l'axe des x, son sommet en B et son foyer en C.

La surface ε correspondant à $\varepsilon = 0$, ou $\lambda = \gamma$, est une aire plane, située sur le plan des xy ou $z = 0$, limitée extérieurement par la parabole ayant son sommet en C et son foyer en B. Tous les autres paraboloïdes ε ont leurs sommets plus éloignés que le point C, et sont tournés vers les abscisses négatives; leurs sections par le plan des xy ont toutes leur foyer en B, et leurs sections par le plan des zx en C.

Tout paraboloïde hyperbolique ε_1 a son sommet en D sur l'axe des x, à une distance de l'origine égale à $\frac{\lambda_1}{2}$, c'est-à-dire entre B et C; sa section par le plan des zx est une parabole s'ouvrant vers les abscisses positives, ayant son sommet en D et son foyer en C; sa section par le plan des xy est une parabole s'ouvrant vers les abscisses négatives, ou vers l'origine, ayant son sommet en D et son foyer en B.

Le paraboloïde correspondant à $\varepsilon_1 = 0$, ou $\lambda_1 = \beta$, est une aire plane, située sur le plan des xy comme la surface $\varepsilon_2 = 0$; mais cette aire est limitée intérieurement par la parabole ayant son sommet en B et son foyer en C; en sorte que l'intérieur de cette parabole est la surface $\varepsilon_2 = 0$, ou $\lambda_2 = \beta$, et l'extérieur, la surface $\varepsilon_1 = 0$, ou $\lambda_1 = \beta$.

Le paraboloïde correspondant à $\varepsilon_1 = \pi$, ou $\lambda_1 = \gamma$, est une aire plane, située sur le plan des yx comme la surface $\varepsilon = 0$; mais cette aire est limitée intérieurement par la parabole dont le sommet est en C

et le foyer en B; c'est-à-dire que sur le plan des yx l'intérieur de cette parabole est la surface $\varepsilon = 0$, ou $\lambda = \gamma$, et l'extérieur, la surface $\varepsilon_1 = \pi$, ou $\lambda_1 = \gamma$.

Les surfaces (21) forment donc un système particulier de surfaces orthogonales, qui pourra être utilisé dans des recherches spéciales. Si l'on prend λ, λ_1, λ_2 pour paramètres de ces surfaces ou pour coordonnées curvilignes, les paramètres différentiels du premier ordre h, h_1, h_2, déduits de la première équation (4), transformée à l'aide des valeurs (3), (18) et (26), sont

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\lambda}{ds} &= h = 2\,\frac{\sqrt{\lambda-\beta}\,\sqrt{\lambda-\gamma}}{\sqrt{\lambda-\lambda_1}\,\sqrt{\lambda-\lambda_2}},\\ \frac{d\lambda_1}{ds_1} &= h_1 = 2\,\frac{\sqrt{\lambda_1-\beta}\,\sqrt{\gamma-\lambda_1}}{\sqrt{\lambda-\lambda_1}\,\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}},\\ \frac{d\lambda_2}{ds_2} &= h_2 = 2\,\frac{\sqrt{\beta-\lambda_2}\,\sqrt{\gamma-\lambda_2}}{\sqrt{\lambda-\lambda_2}\,\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on adopte pour paramètres les transcendantes ε, ε_1, ε_2, les paramètres différentiels du premier ordre η, η_1, η_2 seront plus simplement

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{ds} &= \eta = \frac{2}{\sqrt{\lambda-\lambda_1}\,\sqrt{\lambda-\lambda_2}},\\ \frac{d\varepsilon_1}{ds_1} &= \eta_1 = \frac{2}{\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}\,\sqrt{\lambda-\lambda_1}},\\ \frac{d\varepsilon_2}{ds_2} &= \eta_2 = \frac{2}{\sqrt{\lambda-\lambda_2}\,\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}}. \end{aligned}\right.$$

Les équations (26) serviront de formules de transformation quand on adoptera les paramètres λ, λ_1, λ_2. Dans le cas où l'on choisirait ε, ε_1, ε_2, il faudrait se servir de celles-ci :

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} 2x &= \left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right) + \left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)\left[\mathrm{E}(\varepsilon) - \cos\varepsilon_1 + \mathrm{E}(\varepsilon_2)\right],\\ y &= (\gamma-\beta)\,\mathrm{E}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\mathcal{E}\left(\frac{\varepsilon_2}{2}\right),\\ z &= (\gamma-\beta)\,\mathcal{E}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\mathrm{E}\left(\frac{\varepsilon_2}{2}\right), \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles on a posé généralement, pour simplifier,

$$(31)\qquad \frac{c^2 - c'^2}{2} = [\text{illegible}]\,\alpha, \qquad \frac{c^2 - c'^2}{2} = [\text{illegible}]\,\gamma,$$

et qui se déduisent des équations (26) en y substituant les valeurs (23).

Dans les formules (28) et (29), ds, ds_1, ds_2 représentent les éléments des courbes d'intersection des surfaces (21), courbes qui sont, comme l'on sait, les lignes de courbure de ces surfaces.

Pour faire une application du système coordonné qui vient d'être défini, proposons-nous d'évaluer le volume compris entre le paraboloïde $\varepsilon_2 = \varpi$ (27), où $\lambda_2 = 0$, et un des paraboloïdes ε. La différentielle du volume est:

$$ds\,ds_1\,ds_2 = \frac{d\lambda\,d\lambda_1\,d\lambda_2}{h\,h_1\,h_2} = \frac{d\varepsilon\,d\varepsilon_1\,d\varepsilon_2}{e\,e_1\,e_2},$$

et l'intégrale qu'il s'agit d'obtenir est, d'après les valeurs (28),

$$(32)\qquad V = \frac{1}{8}\int\int\int \frac{[\text{illegible}]\,d\varepsilon\,d\varepsilon_1\,d\varepsilon_2}{[\text{illegible}]};$$

ou, d'après les formules (29),

$$(33)\qquad V = \frac{1}{8}\int_0^{\varpi}\int_0^{\varpi}\int_0^{\varepsilon}(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_1)\,d\varepsilon\,d\varepsilon_1\,d\varepsilon_2;$$

λ, λ_1, λ_2, dans cette dernière intégrale, étant les fonctions respectives de ε, ε_1, ε_2, données par les équations (23).

On a identiquement

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_1) = (\lambda_1 - \lambda_2)\lambda^2 + (\lambda_2 - \lambda)\lambda_1^2 + (\lambda - \lambda_1)\lambda_2^2,$$

et l'intégrale (33) se décompose ainsi :

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} V = \frac{1}{8}\Big[&\Big(\varepsilon_2\int\lambda_1\,d\varepsilon_1 - \varepsilon_1\int\lambda_2\,d\varepsilon_2\Big)\int\lambda^2\,d\varepsilon \\ &+ \Big(\varepsilon\int\lambda_2\,d\varepsilon_2 - \varepsilon_2\int\lambda\,d\varepsilon\Big)\int\lambda_1^2\,d\varepsilon_1 \\ &+ \Big(\varepsilon_1\int\lambda\,d\varepsilon - \varepsilon\int\lambda_1\,d\varepsilon_1\Big)\int\lambda_2^2\,d\varepsilon_2\Big], \end{aligned}\right.$$

en prenant d'abord toutes les intégrales depuis $\varepsilon = 0$, $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$.

Les fonctions (23) donnent successivement, en adoptant la notation (31),

$$\int_0^{\varepsilon} \lambda\, d\varepsilon = \left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right)\varepsilon + \left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)\mathcal{E}(\varepsilon),$$

$$\int_0^{\varepsilon_1} \lambda_1\, d\varepsilon_1 = \left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right)\varepsilon_1 - \left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)\sin\varepsilon_1,$$

$$\int_0^{\varepsilon_2} \lambda_2\, d\varepsilon_2 = \left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right)\varepsilon_2 - \left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)\mathcal{E}(\varepsilon_2),$$

$$\int_0^{\varepsilon} \lambda^2\, d\varepsilon = \left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right)^2\varepsilon + \frac{\gamma^2-\beta^2}{2}\mathcal{E}(\varepsilon) + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)^2\left[E(\varepsilon)\mathcal{E}(\varepsilon) + \varepsilon\right],$$

$$\int_0^{\varepsilon_1} \lambda_1^2\, d\varepsilon_1 = \left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right)^2\varepsilon_1 - \frac{\gamma^2-\beta^2}{2}\sin\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)^2(\cos\varepsilon_1\sin\varepsilon_1 + \varepsilon_1),$$

$$\int_0^{\varepsilon_2} \lambda_2^2\, d\varepsilon_2 = \left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right)^2\varepsilon_2 - \frac{\gamma^2-\beta^2}{2}\mathcal{E}(\varepsilon_2) + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)^2\left[E(\varepsilon_2)\mathcal{E}(\varepsilon_2) - \varepsilon_2\right].$$

et ces valeurs substituées dans V (34) donnent, toutes les réductions faites,

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} V = \frac{(\gamma-\beta)^3}{32}\{ & \varepsilon[E(\varepsilon_2) - \cos\varepsilon_1]\mathcal{E}(\varepsilon_2)\sin\varepsilon_1 \\ & + \varepsilon_1[E(\varepsilon) + E(\varepsilon_2)]\mathcal{E}(\varepsilon)\mathcal{E}(\varepsilon_2) \\ & - \varepsilon_2[E(\varepsilon) + \cos\varepsilon_1]\mathcal{E}(\varepsilon)\sin\varepsilon_1\}. \end{aligned}\right.$$

Enfin, si l'on fait $\varepsilon_1 = \pi$, $\varepsilon_2 = \varpi$, il vient, pour l'intégrale (33),

$$(36)\qquad V = \frac{\varpi}{32}(\gamma-\beta)^3[E(\varepsilon) + E(\varpi)]\mathcal{E}(\varepsilon)\mathcal{E}(\varpi).$$

Si l'on remarque maintenant que, d'après la formule (25),

$$E(\varpi) = \frac{\gamma+\beta}{\gamma-\beta}, \quad \mathcal{E}(\varpi) = \frac{2\sqrt{\beta\gamma}}{\gamma-\beta},$$

et que la valeur λ (23) donne successivement

$$\lambda = \frac{\gamma-\beta}{2}[E(\varepsilon)+E(\varpi)], \quad \lambda-\beta = \frac{\gamma-\beta}{2}[E(\varepsilon)+1], \quad \lambda-\gamma = \frac{\gamma-\beta}{2}[E(\varepsilon)-1],$$

$$\sqrt{\lambda-\beta}\sqrt{\lambda-\gamma} = \frac{\gamma-\beta}{2}\mathcal{E}(\varepsilon);$$

d'où réunissant

$$\frac{\gamma-\beta}{2}[E(\varepsilon)+E(\varpi)] = \lambda, \quad \frac{\gamma-\beta}{2}\mathcal{E}(\varepsilon) = \sqrt{\lambda-\beta}\sqrt{\lambda-\gamma}, \quad \frac{\gamma-\beta}{2}\mathcal{E}(\varpi) = \sqrt{\beta\gamma}.$$

et en multipliant

$$\frac{\gamma-\beta}{8}[E(\rho)+E(\varpi)]\,\zeta(\rho)\,\zeta(\varpi)=\sqrt{\beta\gamma}\,\lambda\sqrt{\lambda-\beta}\sqrt{\lambda-\gamma},$$

on voit que l'intégrale (36), et par suite (32), ont pour valeur

$$(37)\qquad V=\frac{\pi}{4}\sqrt{\beta\gamma}\,\lambda\sqrt{\lambda-\beta}\sqrt{\lambda-\gamma},$$

ou que l'on a

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int_0^\beta\int_\beta^\gamma\int_\gamma^\lambda\frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda-\lambda_2)\,d\lambda\,d\lambda_1\,d\lambda_2}{\sqrt{\lambda-\beta}\sqrt{\lambda-\gamma}\sqrt{\lambda_1-\beta}\sqrt{\gamma-\lambda_1}\sqrt{\beta-\lambda_2}\sqrt{\gamma-\lambda_2}}\\&=2\pi\sqrt{\beta\gamma}\,\lambda\sqrt{\lambda-\beta}\sqrt{\lambda-\gamma}.\end{aligned}\right.$$

Les deux paraboloïdes elliptiques opposés, qui limitent le volume V (37), sont homofocaux et se coupent à angles droits; λ est le double de la distance qui sépare leurs sommets : ces paraboloïdes ont pour équations

$$(39)\qquad \frac{y^2}{\lambda(\lambda-\beta)}+\frac{z^2}{\lambda(\lambda-\gamma)}+\frac{2x}{\lambda}=1,\quad \frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma}-2x=0;$$

et, par l'élimination de x, on trouve

$$(40)\qquad \frac{y^2}{\beta(\lambda-\beta)}+\frac{z^2}{\gamma(\lambda-\gamma)}=1$$

pour l'équation du cylindre droit à base elliptique qui contient leur intersection à double courbure. Or le volume de ce cylindre, limité à deux bases tangentes aux sommets des deux paraboloïdes, et qui a conséquemment pour hauteur $\frac{\lambda}{2}$, sera évidemment, d'après l'équation (40),

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\beta\gamma}\,\lambda\sqrt{\lambda-\beta}\sqrt{\lambda-\gamma},\quad \text{ou}\quad 2V(37).$$

On peut donc dire très-simplement que le volume cherché est la moitié de celui du cylindre droit, à base elliptique, qui l'enveloppe.

Sur les fonctions qui diffèrent le moins possible de zéro;

PAR M. P. TCHEBICHEF.

(Tiré des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. XXII; traduit du russe par M. N. DE KHANIKOF.)

1. J'ai montré, dans le Mémoire *Sur les fonctions semblables à celles de Legendre* [*], comment le procédé que ce géomètre a employé [**], pour établir la propriété fondamentale des fonctions connues sous son nom, pouvait être étendu à d'autres fonctions, plus compliquées, qu'on obtient en développant l'expression

$$\frac{\left(1+s+\sqrt{1-2sx+s^2}\right)^{\lambda}\left(1-s+\sqrt{1-2sx+s^2}\right)^{\mu}}{\sqrt{1-2sx+s^2}},$$

en une série de la forme

$$T_0 + T_1 s + T_2 s^2 + \ldots.$$

Jacobi, dans son Mémoire intitulé : *Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe* [***], déduit la même propriété des fonctions T_0, T_1, $T_2, \ldots$, à l'aide d'une équation différentielle à laquelle on satisfait au moyen de séries hypergéométriques. Je me propose ici d'appliquer ces fonctions à une recherche qui montrera plus clairement encore leur rapport intime aux fonctions de Le-

[*] *Travaux savants de l'Académie des Sciences*, 1869.

[**] *Exercices du Calcul intégral*, t. II, p. 250.

[***] JACOBI, *Mathematische Werke*. Band. III.

gendre. Cette application consiste à déterminer les polynômes de la forme

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n,$$

qui, sans cesser de croître ou de décroître constamment, entre des limites données, diffèrent aussi peu que possible de zéro. Les polynômes de cette espèce, comme nous le verrons, s'expriment à l'aide des fonctions de Legendre, uniquement dans le cas où n, le degré du polynôme, est un nombre impair, et le polynôme lui-même est une fonction croissante. Dans tous les autres cas, la détermination de ces polynômes exige l'emploi d'autres fonctions, que nous venons de désigner par T_0, T_1, T_2, ..., et que l'on obtient en développant en série l'expression

[illegible]

pour des valeurs de λ et μ, différentes de zéro. Les polynômes, déterminés de cette façon, trouvent une application utile dans les recherches de l'Analyse pure, comme dans les questions de Mécanique pratique, ainsi que nous l'avons montré dans notre Communication du 22 août 1871, faite à Kiev lors de la troisième réunion des naturalistes russes, de même que dans notre article sur le *Régulateur centrifuge*, imprimé à la suite du compte rendu de l'École technologique de Moscou, pour l'année 1871.

2. Pour simplifier les formules, nous supposerons que les limites des valeurs de la variable x sont réduites à -1 et $+1$ (ce qu'il est toujours facile de réaliser). En désignant par $F(x)$ le polynôme

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n,$$

nous ferons remarquer que l'une des conditions de notre problème impose à la fonction $F(x)$ d'être constamment croissante, ou constamment décroissante, depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$, de sorte que sa dérivée première

$$F'(x)$$

doit conserver toujours le même signe entre ces limites; par conséquent, les valeurs primitives

$$F(-1) \quad \text{et} \quad F(+1),$$

qui correspondent aux valeurs

$$x = -1 \quad \text{et} \quad x = +1,$$

représenteront les limites entre lesquelles la fonction $F(x)$ variera dans le passage de $x = -1$ à $x = +1$. Pour que le polynôme $F(x)$ puisse différer aussi peu que possible de zéro, en passant de $F(-1)$ à $F(+1)$, il faut que le plus grand des nombres

$$F(-1), \quad F(+1)$$

soit, en valeur numérique, aussi petit que possible et qu'il ne puisse devenir moindre par aucune variation du polynôme $F(x)$, compatible avec les conditions de la question, qui déterminent le degré et la forme du polynôme

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n,$$

ainsi que le signe de sa dérivée $F'(x)$.

Il est facile de voir que le polynôme cherché doit être tel que l'on ait l'égalité

$$F(+1) = -F(-1).$$

En effet, si cette égalité n'a pas lieu, nous n'aurons qu'à retrancher de $F(x)$ la quantité constante

$$\frac{F(+1) + F(-1)}{2},$$

ce qui, évidemment, ne change ni la forme du polynôme $F(x)$, ni la valeur de sa dérivée, et nous obtenons, au lieu des limites anciennes,

$$F_1(-1) \quad \text{et} \quad F_1(+1),$$

deux nouvelles valeurs que voici

$$F(-1) = \frac{F(-1) - F(+1)}{2} = -\frac{F(+1) - F(-1)}{2},$$

$$F(+1) = \frac{F(+1) - F(-1)}{2} = -\frac{F(-1) - F(+1)}{2}.$$

En comparant les carrés de ces quantités avec la moyenne arithmétique des carrés de

$$F(-1) \quad \text{et de} \quad F(+1),$$

nous verrons que

$$\left[\frac{F(+1) - F(-1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{F(-1) - F(+1)}{2}\right]^2$$
$$= \frac{F^2(-1) + F^2(-1)}{2} - \left[\frac{F(+1) + F(-1)}{2}\right]^2.$$

D'où il résulte que le carré des nouvelles limites

$$\frac{F(-1) - F(+1)}{2}, \quad \frac{F(+1) - F(-1)}{2}$$

sera inférieur au plus grand des carrés

$$F^2(-1), \quad F^2(+1),$$

et que, par suite, les nouvelles limites seront inférieures, en valeur numérique, à la plus grande des anciennes limites. Ainsi nous sommes conduits à admettre que, dans la question qui nous occupe, tous les polynômes cherchés doivent satisfaire à l'égalité

$$F(+1) = -F(-1).$$

Cette égalité nous donne donc les moyens de trouver la valeur des polynômes que nous examinons, à l'aide de la valeur de leur dérivée.

En effet, représentons le polynôme $F(x)$ par l'intégrale

$$F(x) = \int_{-1}^{x} F'(x)\,dx + C.$$

et mettons cette expression dans l'égalité trouvée ci-dessus, nous obtenons, pour déterminer la constante C, l'équation que voici

$$\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx + C = -C,$$

d'où l'on tire

$$C = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx.$$

En mettant cette valeur de C dans l'expression de F(x), on a

$$(1) \qquad F(x) = \int_{-1}^{x} F'(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx.$$

En déterminant les valeurs limites du polynome F(x) correspondant à $x = -1$, $x = +1$, nous trouverons qu'elles sont égales à l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx$$

prise avec le signe + ou avec le signe −. Il s'ensuit, de plus, que la plus grande valeur des polynômes que nous avons en vue sera égale à la valeur numérique de l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx.$$

3. Passant à la détermination de la dérivée

$$F'(x),$$

nous ferons observer que, comme nous l'avons dit, c'est une condition des polynômes que nous considérons d'avoir une dérivée première qui ne change pas de signe entre $x = -1$ et $x = +1$; non-seulement toutes les racines de l'équation

$$F'(x) = 0,$$

comprises en dedans des limites $x = -1$ et $x = +1$, doivent être

multiples, mais le degré de leur multiplicité doit s'exprimer en nombres pairs.

Or, désignons par

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\ldots,\quad \alpha_m$$

toutes les racines de l'équation

$$F(x) = 0,$$

supérieures à -1 et inférieures à $+1$, par

$$2\lambda_1,\quad 2\lambda_2,\ldots,\quad 2\lambda_m$$

les degrés de multiplicité de ces racines, et supposons, comme cela est permis, que l'équation $F(x) = 0$ ait λ racines égales à $+1$, et λ_0 racines égales à -1; nous allons prouver que la somme

$$\lambda + \lambda_0 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + 2\lambda_m,$$

qui représente le nombre des racines de l'équation $F(x) = 0$ ne dépassant pas les limites $x = -1$ et $x = +1$, ne saurait être inférieure à $n - 1$, ou au degré de cette équation.

Pour nous en convaincre, admettons le contraire, c'est-à-dire posons

$$\lambda + \lambda_0 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + 2\lambda_m < n - 1,$$

et prouvons que dans cette hypothèse il est toujours possible de faire varier le polynôme $F(x)$ sans déranger ni sa forme, ni le signe de sa dérivée $F'(x)$ entre les limites $x = -1$ et $x = +1$, mais de manière à diminuer la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx,$$

qui détermine la limite de l'écart entre le polynôme cherché et zéro.

Pour le faire voir, nous observerons que, d'après ce que nous ve-

nons de dire, l'équation

$$F'(x) = 0$$

et la suivante

$$(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m} = 0$$

auront, entre les valeurs limites $x = -1$ et $x = +1$, les mêmes racines et avec les mêmes degrés de multiplicité, et, par suite, le rapport

$$\frac{F'(x)}{(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m}}$$

ne changera pas de signe entre $x = -1$ et $x = +1$ et sera compris entre deux quantités distinctes de zéro. Désignons par L_0 la plus petite de ces quantités en valeur numérique, et remarquons que la différence

$$\frac{F'(x)}{(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m}} - L_0,$$

pour toutes les valeurs de x inférieures à $+1$ et supérieures à -1, aura le même signe que le rapport

$$\frac{F'(x)}{(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m}},$$

et qu'elle lui sera inférieure par sa valeur numérique. La même chose, évidemment, aura lieu pour les expressions

$$F'(x) - L_0(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m} \quad \text{et} \quad F'(x),$$

qu'on déduit des précédentes en les multipliant par

$$(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m};$$

d'où il est clair qu'en soustrayant de $F'(x)$ l'expression

$$L_0(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x+\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m}$$

nous ne cessons pas de satisfaire à la condition de conserver le même signe à $F'(x)$ entre les limites $x = \mp 1$; mais nous diminuons par là la valeur absolue de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} F'(x)\, dx,$$

qui détermine la limite de l'écart entre le polynôme cherché et zéro.

Quant à la forme du polynôme

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n,$$

après avoir fait subir à $F'(x)$ la transformation ci-dessus indiquée, elle restera la même, car, d'après l'inégalité (2), l'expression

$$L(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m}$$

ne contiendra pas de puissances de x, supérieures tout au plus à $n-2$.

Nous voyons ainsi qu'en admettant la possibilité de l'inégalité (2) on peut rendre le polynôme $F(x)$ plus approché de zéro, en lui conservant, conformément aux considérations de la question, la forme

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n,$$

et sans faire varier le signe de sa dérivée première entre les limites $x = -1$ et $x = +1$.

Or cette conclusion est absurde, puisque, par hypothèse, le polynôme en question est celui qui diffère le moins possible de zéro, entre les limites $x = -1$ et $x = +1$.

En observant que cette inégalité, dont le côté gauche est le nombre des racines de l'équation $F'(x) = 0$, comprises entre les limites $x = -1$ et $x = +1$, et la partie droite le degré $n-1$ de cette équation, ne peut avoir lieu, non plus, avec un signe d'inégalité contraire au premier, nous sommes conduits à admettre l'égalité

$$\lambda + \lambda_0 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + 2\lambda_m = n - 1.$$

d'où il résulte que toutes les $n-1$ racines de l'équation $F'(x) = 0$ lui seront communes avec l'équation

$$(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\dots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m}=0,$$

et qu'ainsi l'on a

$$F'(x) = C(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\dots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m},$$

où C est un facteur constant.

Pour trouver la valeur de ce facteur, nous observons que, le polynôme cherché étant de la forme

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n,$$

sa dérivée sera

$$F'(x) = n x^{n-1} + (n-1) A_1 x^{n-2} + (n-2) A_2 x^{n-3} + \dots + A_{n-1},$$

ce qui, étant comparé à l'expression ci-dessus de $F'(x)$, nous donne

$$C = n.$$

Par conséquent, $F'(x)$ peut être représentée par la formule que voici :

$$F'(x) = n(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\dots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m}.$$

Si maintenant on désigne par q et q_0 les quotients, et par ρ et ρ_0 les restes qu'on obtient en divisant les exposants λ et λ_0 par 2, cette égalité pourra être mise sous la forme

$$F'(x) = n(x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_0} \times [(x-1)^{q}(x+1)^{q_0}(x-\alpha_1)^{\lambda_1}(x-\alpha_2)^{\lambda_2}\dots(x-\alpha_m)^{\lambda_m}]^2,$$

ou bien

(3) $$F'(x) = n(x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_0} U^2,$$

U étant un polynôme donné par la formule

$$U = (x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{\lambda_1}(x-\alpha_2)^{\lambda_2}\ldots(x-\alpha_\mu)^{\lambda_\mu}.$$

Les nombres ρ et ρ_0 de la formule (3), étant les restes de la division de λ et λ_0 par 2, ne peuvent avoir que les valeurs zéro et 1, et il est très-aisé de voir, dans chaque cas particulier, d'après la forme du nombre n, degré du polynôme cherché $F(x)$, et d'après le signe de sa dérivée première $F'(x)$, entre $x = -1$ et $x = +1$, lequel de ces deux nombres doit être adopté pour ρ et ρ_0 dans l'expression de $F'(x)$, par la formule (3).

En effet, si n, degré du polynôme $F(x)$, est un nombre impair, sa dérivée $F'(x)$ sera de degré pair, et dans ce cas l'égalité (3), où U^2 est aussi une fonction de degré pair, indique que le facteur $(x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_0}$ doit aussi être une fonction de degré pair; mais, comme il n'est possible de satisfaire à cette condition, ni dans l'hypothèse de $\rho = 0$ et $\rho_0 = 1$, ni dans celle de $\rho = 1$ et $\rho_0 = 0$, on est forcé d'admettre que, dans ce cas, on aura ou $\rho = 0$ et $\rho_0 = 0$, ou bien $\rho = 1$ et $\rho_0 = 1$.

Pour décider lequel de ces deux systèmes de valeurs de ρ et ρ_0 doit être adopté, nous observerons que le premier nous donne, d'après la formule (3), l'expression

$$F'(x) = nU^2,$$

et le second

$$F'(x) = -n(x-1)(x+1)U^2,$$

et qu'ainsi, la variable x demeurant comprise entre -1 et $+1$, dans le premier cas, $F'(x)$ aura une valeur positive, et que, dans le second cas, elle aura une valeur négative. De cette façon, il est clair que les valeurs $\rho = 0$ et $\rho_0 = 0$ doivent être adoptées dans le cas où $F(x)$ sera une fonction constamment croissante entre les limites $x = -1$ et $x = +1$, et $\rho = 1$ et $\rho_0 = 1$, dans le cas où $F(x)$ sera une fonction constamment décroissante.

Passant à la considération du cas où n est pair, nous observerons que, dans cette hypothèse, le degré de la dérivée première de $F(x)$ sera impair, et, par suite, pour satisfaire à l'égalité (3), nous devons assigner à ρ et ρ_0 les valeurs que voici : ou bien $\rho = 0$ et $\rho_0 = 1$, ou

vice versâ $\rho = 1$ et $\rho_0 = 0$. Or, comme pour ces valeurs de ρ et ρ_0 la formule (3) devient respectivement

$$F'(x) = n(x+1)U^2,$$
$$F'(x) = n(x-1)U^2,$$

et que la première de ces deux expressions reste constamment positive depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$, et la seconde constamment négative pour les mêmes valeurs de x, nous concluons que, dans le cas de n pair, on a $\rho = 0$ et $\rho_0 = 1$, si $F(x)$ est un polynôme toujours croissant, depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$, et $\rho = 1$ et $\rho_0 = 0$, quand $F(x)$ décroîtra constamment entre les mêmes limites.

5. Pour déterminer le polynôme U, qui figure dans l'expression ci-dessus de $F'(x)$, nous ferons remarquer que, d'après le n° **3**, ce polynôme est un produit de la forme

$$(x-1)^{q}(x+1)^{q_0}(x-\alpha_1)^{q_1}(x-\alpha_2)^{q_2}\ldots(x-\alpha_m)^{q_m};$$

par conséquent, il a toujours la forme

$$U = x^l + B_1 x^{l-1} + B_2 x^{l-2} + \ldots + B_{l-1}x + B_l,$$

et la valeur du degré l s'obtient à l'aide de l'égalité (3), qui donne, entre les exposants, la relation

$$(4) \qquad n - 1 = \rho + \rho_0 + 2l.$$

D'un autre côté nous savons, par le n° **3**, que la limite de l'écart entre zéro et le polynôme cherché $F(x)$, depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$, est égale à la valeur numérique de l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx;$$

mais cette intégrale (3) se réduit à

$$(-1)^{\rho}\frac{n}{2}\int_{-1}^{+1}(1+x)^{\rho_0}(1-x)^{\rho}U^2\,dx,$$

si l'on y met pour $F'(x)$ son expression (3), et la valeur numérique de cette dernière intégrale est évidemment

$$\frac{n}{2}\int_{-1}^{+1}(1+x)^{[illegible]}(1-x)^{[illegible]}\mathrm{U}^2\,dx;$$

Donc, en désignant par L la limite de l'écart entre zéro et le polynôme cherché $F(x)$, nous aurons

$$(5)\qquad \mathrm{L} = \frac{n}{2}\int_{-1}^{+1}(1+x)^{[illegible]}(1-x)^{[illegible]}\mathrm{U}^2\,dx.$$

Ainsi, pour diminuer, autant que possible, la quantité L, sans changer toutefois les conditions de la question, nous aurons à déterminer le polynôme U de façon à rendre minimum l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^{[illegible]}(1-x)^{[illegible]}\mathrm{U}^2\,dx.$$

Il est facile d'y parvenir à l'aide des fonctions

$$\mathrm{T}_0,\quad \mathrm{T}_1,\quad \mathrm{T}_2,\ldots,\quad \mathrm{T}_l,$$

qu'on obtient en développant l'expression

$$\frac{(1-s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{[illegible]}(1-s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{[illegible]}}{\sqrt{1-2sx+s^2}}$$

en une série de la forme

$$\mathrm{T}_0+\mathrm{T}_1 s+\mathrm{T}_2 s^2+\ldots+\mathrm{T}_l s^l.$$

En effet, on sait que ces fonctions sont de degrés $0, 1, 2, \ldots, l, \ldots$, et qu'en général pour tout m distinct de m_1 elles satisfont à l'équation

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{T}_m\mathrm{T}_{m_1}}{(1+x)^{[illegible]}(1-x)^{[illegible]}}\,dx = 0;$$

de plus, il résulte de ce que nous avons établi dans notre Mémoire *Sur les fractions continues* [*] que l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{Z^2}{(1+x)^{\rho}(1-x)^{\rho_0}}\, dx,$$

Z étant de la forme

$$x^l + B_1 x^{l-1} + B_2 x^{l-2} + \ldots + B_{l-1} x + B_l,$$

acquiert une valeur *minimum* lorsque le polynôme Z ne diffère de la fonction T_l que par un facteur constant. Nous en concluons donc que le polynôme

$$U = x^l + B_1 x^{l-1} + B_2 x^{l-2} + \ldots + B_{l-1} x + B_l,$$

qui correspond à la valeur minimum de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\rho}(1-x)^{\rho_0}\, U^2\, dx,$$

sera donné par la formule $U = CT_l$ en faisant $\lambda = -\rho$ et $\mu = -\rho_0$, dans l'expression de la fonction T_l, qui nous est fournie par le développement en série

$$T_0 + T_1 s + T_2 s^2 + \ldots + T_l s^l + \ldots$$

de l'expression

$$\frac{(1 - s + \sqrt{1 - 2sx + s^2})^{\lambda}\,(1 - s + \sqrt{1 - 2sx + s^2})^{\mu}}{\sqrt{1 - 2sx + s^2}}.$$

Désignant par K_l le coefficient de x^l, dans la fonction T_l, et remarquant que cette puissance de x doit figurer dans le polynôme U avec un coefficient égal à l'unité, nous en concluons que l'expression que nous venons de trouver pour U entraîne l'égalité

$$CK_l = 1,$$

[*] *Mémoires scientifiques de l'Académie des Sciences*, de la 1re et de la 3e Classe, t. III.

d'où l'on tire

$$C = \frac{1}{K_l},$$

et, par suite, le polynôme U est complètement déterminé par l'équation

$$(6) \qquad U = \frac{1}{K_l} T_l,$$

où, comme nous venons de le dire, la fonction T_l s'obtient en développant l'expression

$$\frac{\left(1 - s + \sqrt{1 - 2sx + s^2}\right)^l - \left(1 - s - \sqrt{1 - 2sx + s^2}\right)^l}{\sqrt{1 - 2sx + s^2}}.$$

Or, comme ce développement peut être représenté par l'égalité que voici :

$$\frac{\left(1 - s + \sqrt{1 - 2sx + s^2}\right)^l - \left(1 - s - \sqrt{1 - 2sx + s^2}\right)^l}{\sqrt{1 - 2sx + s^2}} = \sum_0^\infty T_m s^m,$$

et désignant par K_m, K'_m, ... les coefficients de x^m, x^{m-1}, ... dans la fonction T_m pour une valeur quelconque de m, nous aurons

$$\frac{\left(1 - s + \sqrt{1 - 2sx + s^2}\right)^l - \left(1 - s - \sqrt{1 - 2sx + s^2}\right)^l}{\sqrt{1 - 2sx + s^2}}$$
$$= \sum_0^\infty \left(K_m x^m + K'_m x^{m-1} + \ldots\right) s^m,$$

quelles que soient les valeurs de s et x. Donc, si l'on pose

$$x = \frac{z}{s},$$

et si l'on fait ensuite $s = 0$, l'égalité ci-dessus se réduit à la formule

$$\frac{\left(1 + \sqrt{1 - 2z}\right)^l - \left(1 - \sqrt{1 - 2z}\right)^l}{\sqrt{1 - 2z}} = \sum K_m z^m.$$

Cette expression nous montre que K_l, coefficient de x^l dans la fonc-

tion T_l, sera identique au coefficient de α^l, dans le développement en série de l'expression

$$\frac{(1+\sqrt{1-2\alpha})^{\rho+\rho_0}}{\sqrt{1-2\alpha}}.$$

Mais comme on sait, par ce que nous avons dit, dans le n° 4, sur les nombres ρ_0 et ρ, que leur somme ne peut être que zéro, 1 ou 2, la formule $\frac{(1+\sqrt{1-2\alpha})^{\rho+\rho_0}}{\sqrt{1-2\alpha}}$, pour ces valeurs, peut être remplacée par les séries

$$1+\frac{1}{1}\alpha+\frac{1.3}{1.2}\alpha^2+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2l-1)}{1.2.3\ldots l}\alpha^l+\ldots,$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.1.2}\alpha+\frac{1.3.5}{2.1.2.3}\alpha^2+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2l+1)}{2.1.2.3\ldots(l+1)}\alpha^l+\ldots,$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{1.3}{1.2}\alpha+\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{1.3.5}{1.2.3}\alpha^2+\ldots+\frac{1}{2}\,\frac{l+1}{l+2}\,\frac{1.3.5\ldots(2l+1)}{1.2.3\ldots(l+1)}\alpha^l+\ldots;$$

par suite, le coefficient K^l, selon que l'on donne à la somme $\rho+\rho_0$ les valeurs zéro, 1 ou 2, aura les trois valeurs que voici :

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} K_l &= \frac{1.3.5\ldots(2l-1)}{1.2.3\ldots l},\\ K_l &= \frac{1.1.3.5\ldots(2l+1)}{2.1.2.3\ldots(l+1)},\\ K_l &= \frac{1.1.3.5\ldots(2l+1)(l+1)}{2.1.2.3\ldots(l+1)(l+2)}.\end{aligned}\right.$$

6. D'après toutes les recherches précédentes, il sera aisé de trouver, dans chaque cas particulier, un polynôme $F(x)$ de la forme de

$$x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n,$$

qui, tout en restant toujours croissant ou décroissant, depuis $x=-1$ jusqu'à $x=+1$, diffère le moins possible de zéro entre ces mêmes limites.

Nous commencerons par déterminer les nombres ρ et ρ_0 en obser-

vant que, d'après le n° 4, on a, n étant impair,

$$\rho = 0 \quad \text{et} \quad \rho_0 = 0,$$

ou bien

$$\rho = 1 \quad \text{et} \quad \rho_0 = 1,$$

selon que le polynôme cherché croîtra ou décroîtra constamment entre les limites $x = 1$ et $x = +1$, et que, dans le cas de n pair, ces mêmes nombres seront

$$\rho = 0 \quad \text{et} \quad \rho_0 = 1,$$

ou bien

$$\rho = 1 \quad \text{et} \quad \rho_0 = 0,$$

selon que le polynôme cherché sera constamment croissant ou constamment décroissant pour toutes les valeurs de x, depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$.

Connaissant ρ et ρ_0, nous trouvons, à l'aide de l'équation (4),

$$(8) \qquad l = \frac{n - \rho_0 - \rho - 1}{2},$$

puis nous cherchons la valeur de la fonction T_l, coefficient de s^l dans le développement de l'expression

$$\frac{(1+s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{\rho}(1-s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{\rho_0}}{\sqrt{1-2sx+s^2}}$$

selon les puissances ascendantes de s, et la valeur du coefficient K_l, par la formule (7). Les valeurs de T_l et de K_l étant connues, à l'aide des équations (3) et (6), dont on élimine la fonction U, nous déterminons $F'(x)$, dérivée du polynôme cherché,

$$F'(x) = \frac{n}{K_l}(x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_0}T_l^2;$$

mettant cette valeur à la place de $F'(x)$ dans l'équation (1), nous obtenons enfin, pour l'expression du polynôme cherché, la formule que voici :

$$\frac{n}{K_l}\left[\int_{-1}^{x}(x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_0}T_l^2\,dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_0}T_l^2\,dx\right].$$

Nous trouverons ainsi le polynôme cherché, qui, jouissant de la propriété de croître ou de décroître constamment, depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$, différera de zéro, moins que tous les autres polynômes de la même forme.

Maintenant, pour calculer la valeur de L, limite des écarts de ce polynôme, nous observerons que la formule (5), en y mettant l'expression de U, tirée de l'équation (6), nous donne

$$L = \frac{n}{2K_l^2} \int_{-1}^{+1} (1+x)^{\rho_0} (1-x)^{\rho}\, T_l^2\, dx,$$

ou bien en mettant pour n sa valeur tirée de l'équation (4), c'est-à-dire la somme $2l + \rho + \rho_0 + 1$,

$$L = \frac{2l + \rho + \rho_0 + 1}{2K_l^2} \int_{-1}^{+1} (1+x)^{\rho_0} (1-x)^{\rho}\, T_l^2\, dx.$$

Nous observerons ensuite que, d'après ce que nous avons établi dans notre Mémoire *Sur les fonctions semblables aux fonctions de Legendre* (*Mém. sc.*, 1869), sur la réduction de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sum_0^{\infty} T_m s^m \sum_0^{\infty} T_n t^n}{(1+x)^{\lambda} (1-x)^{\mu}}\, dx$$

à l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{2^{\lambda+\mu+1} (1-stx)^{[illegible]}}{x^{[illegible]} (1-x)^{[illegible]} (1-stx)^{[illegible]}}\, dx,$$

la valeur de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\rho_0} (1-x)^{\rho}\, T_l^2\, dx$, qui entre dans l'expression de L, sera le coefficient de $(st)^l$ dans le développement de la formule intégrale

$$\int_0^1 \frac{2^{\rho_0+\rho+1} (1-stx)^{[illegible]}}{x^{-\rho_0} (1-x)^{-\rho} (1-stx)^{[illegible]}}\, dx,$$

suivant les puissances ascendantes de st. Or, comme cette intégrale devient

$$\frac{1}{\sqrt{st}}\log\frac{1+\sqrt{st}}{1-\sqrt{st}} \quad \text{pour} \quad \rho = 0 \quad \text{et} \quad \rho_0 = 0,$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(st)^{\frac{3}{2}}}\log\frac{1+\sqrt{st}}{1-\sqrt{st}} + \frac{\log(1-st)}{s^2t^2}\right] \quad \text{pour} \quad \rho = 1 \quad \text{et} \quad \rho_0 = 1,$$

et

$$-\frac{1}{2st}\log(1-st) \quad \text{pour} \quad \rho = 0 \quad \text{et} \quad \rho_0 = 1,$$

de même que pour $\rho = 1$ et $\rho_0 = 0$, et que ces trois expressions se développent en trois séries que voici :

$$2 + \frac{2}{3}st + \frac{2}{5}(st)^2 + \ldots + \frac{2}{2l+1}(st)^l + \ldots$$

$$\frac{1}{2.2.3} + \frac{2}{2.3.5}st + \frac{3}{2.4.7}(st)^2 + \ldots + \frac{l+1}{2(l+2)(2l+3)}(st)^l + \ldots,$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}st + \frac{1}{6}(st)^2 + \ldots + \frac{1}{2(l+1)}(st)^l + \ldots,$$

les valeurs de l'intégrale $\int_{-1}^{+1}(1+x)^\rho(1-x)^{\rho_0}\,\mathrm{T}_l^2\,dx$ seront, pour les trois systèmes de valeurs de ρ et ρ_0 que nous venons de mentionner,

$$\frac{2}{2l+1}, \quad \frac{l+1}{2(l+2)(2l+3)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2(l+1)}.$$

En mettant ces valeurs dans l'expression de L à la place de l'intégrale qui y figure, et en remplaçant K_l par ses valeurs tirées des équations (7), nous obtenons pour la valeur de L les trois expressions que voici :

1°
$$\mathrm{L} = \left[\frac{1.2.3\ldots l}{1.3.5\ldots(2l-1)}\right]^2,$$

2°
$$\mathrm{L} = \left[\frac{1.2.3\ldots(l+1)}{1.3.5\ldots(2l+1)}\right]^2\frac{l+2}{l+1},$$

et

3°
$$\mathrm{L} = 2\left[\frac{1.2.3\ldots(l+1)}{1.3.5\ldots(2l+1)}\right]^2,$$

correspondantes aux trois hypothèses sur les valeurs de ρ et de ρ_0,

1° $\rho = 0$ et $\rho_0 = 0$,

2° $\rho = 1$ et $\rho_0 = 1$,

et

3° $\rho = 0$, $\rho_0 = 1$, ou bien $\rho = 1$ et $\rho_0 = 0$;

mais, d'après (8), ces trois systèmes d'hypothèses sur les valeurs de ρ et ρ_0 nous donnent

$$l = \frac{n-1}{2}, \quad l = \frac{n-3}{2} \quad \text{et} \quad l = \frac{n-2}{2};$$

et par suite les expressions ci-dessus de L se réduisent à

$$L = \left[\frac{1.2.3\ldots\frac{n-1}{2}}{1.3.5\ldots(n-2)}\right]^2,$$

$$L = \left[\frac{1.2.3\ldots\frac{n-1}{2}}{1.3.5\ldots(n-2)}\right]^2 \frac{n-1}{n},$$

$$L = 2\left[\frac{1.2.3\ldots\frac{n}{2}}{1.3.5\ldots(n-1)}\right]^2.$$

Les deux premières de ces expressions de L obtenues dans les hypothèses ρ et $\rho_0 = 0$, et ρ et $\rho_0 = 1$, et se rapportant toutes deux, d'après le n° **6**, au cas de n impair, peuvent être remplacées par une seule formule

$$L = \left(\frac{1.2.3\ldots\frac{n-1}{2}}{1.3.5\ldots(n-2)}\right)^2 \frac{n}{n \pm 1},$$

qui se réduit à la première ou à la seconde, selon que dans $n \pm 1$ on prend le signe $+$ ou le signe $-$. Or, comme la première des trois expressions ci-dessus de L correspond à l'hypothèse $\rho = 0$ et $\rho_0 = 0$, c'est-à-dire (d'après le n° 5) au cas où le polynôme cherché ne cesse de croître entre les limites de $x = -1$ et $x = +1$, et que la seconde

de ces expressions a été obtenue dans l'hypothèse de $\rho = 1$ et $\rho_n = 1$, c'est-à-dire en admettant que le polynôme cherché décroît constamment entre les limites de $x = -1$ et $x = +1$, nous concluons que l'on doit garder, dans la formule

$$L = \left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \frac{n-1}{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-2)}\right]^2 \frac{n+1}{n \pm 1},$$

le signe + ou le signe −, selon que le polynôme cherché ne cesse de croître ou de décroître entre les limites $x = -1$ et $x = +1$, bien entendu dans le cas où n, le degré de ce polynôme, est un nombre impair. Quant à la détermination de L dans le cas de n pair, la valeur est donnée par la troisième expression de L, à savoir :

$$L = 2\left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \frac{n}{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-1)}\right]^2;$$

car elle a été obtenue en faisant $\rho = 0$ et $\rho_n = 1$ ou bien $\rho = 1$ et $\rho_n = 0$.

7. Les polynômes de la forme

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n,$$

déterminés conformément à ce qui vient d'être dit, différeront moins de zéro, entre les limites $x = -1$ et $x = +1$, que tous les polynômes de la même espèce, et qui seront, comme eux, constamment croissants ou constamment décroissants entre les limites indiquées de la variable x. En d'autres termes, l'écart entre zéro et tout polynôme satisfaisant aux mêmes conditions ne saurait être inférieur à L, limite des écarts entre zéro et la valeur des polynômes que nous examinons. Les valeurs de L que nous venons de trouver nous permettent d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si un polynôme de la forme*

$$x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

ne cesse de croître ou de décroître depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$, sa

valeur numérique ne saurait être, dans ces limites, inférieure :

$$2\left[\frac{1.2.3\ldots\frac{n}{2}}{1.3.5\ldots(n-1)}\right] \quad \textit{si } n \textit{ est un nombre pair}$$

ou bien à

$$\left[\frac{1.2.3\ldots\frac{n-1}{2}}{1.3.5\ldots(n-2)}\right]\frac{n+1}{n\pm1} \quad \textit{si } n \textit{ est impair.}$$

Dans la dernière formule, il faut prendre dans l'expression $n \pm 1$ *le signe* $+$ *ou le signe* $-$, *selon que le polynôme cherché croît ou décroît depuis* $x = -1$ *jusqu'à* $x = +1$.

Ce théorème nous permettra d'en déduire un autre plus simple, en remplaçant les valeurs exactes de L par des valeurs approchées, mais inférieures aux premières. En effet, ces valeurs approchées s'obtiennent aisément à l'aide de la formule de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\cdots\frac{2m}{2m-1}\,\frac{2m}{2m+1}\,\frac{2m+2}{2m+1}\,\frac{2m+2}{2m+3}\cdots$$

Notamment, si l'on fait

$$X = \frac{2m(2m+2)}{(2m+1)^2}\,\frac{(2m+2)(2m+4)}{(2m+3)^2}\cdots$$

et

$$Y = \frac{(2m+2)^2}{(2m+1)(2m+3)}\,\frac{(2m+4)^2}{(2m+3)(2m+5)}\cdots,$$

l'expression de $\frac{\pi}{2}$ devient

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\cdots\frac{2m}{2m-1}\,X$$

et

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\cdots\frac{2m}{2m-1}\,\frac{2m}{2m+1}\,Y;$$

d'où l'on tire

$$\left[\frac{1.2.3\ldots m}{1.3.5\ldots(2m-1)}\right]^2 = \frac{m\pi}{2^{2m}X},$$

$$\left[\frac{1.2.3\ldots m}{1.3.5\ldots(2m-1)}\right]^2 = \frac{(2m+1)\pi}{2^{2m+1}Y}.$$

mais, comme les valeurs trouvées ci-dessus pour X et Y peuvent être mises sous les formes

$$X = \left[1 - \frac{1}{(2m+1)^2}\right]\left[1 - \frac{1}{(2m+3)^2}\right]\cdots,$$

$$Y = \left[1 + \frac{1}{(2m+1)(2m+3)}\right]\left[1 + \frac{1}{(2m+3)(2m+5)}\right]\cdots,$$

il est évident que

$$X < 1 \quad \text{et} \quad Y > 1.$$

Donc en supprimant, dans les équations précédentes, les termes de X et Y, nous obtenons les inégalités

$$\left[\frac{1.2.3\ldots m}{1.3.5\ldots(2m-1)}\right]^2 > \frac{2m\pi}{2^{2m+1}}$$

et

$$\left[\frac{1.2.3\ldots m}{1.3.5\ldots(2m-1)}\right]^2 < \frac{(2m+1)\pi}{2^{2m+1}}.$$

Ainsi la valeur de $\left[\frac{1.2.3\ldots m}{1.3.5\ldots(2m-1)}\right]^2$ sera comprise entre deux produits qu'on obtient en multipliant $\frac{\pi}{2^{2m+1}}$ par $2m$ et $2m+1$; donc cette valeur sera égale à $\frac{\pi}{2^{2m+1}}$ multipliée par une certaine valeur moyenne entre $2m$ et $2m+1$; mais, comme cette moyenne peut être représentée par $2m+\theta$, où l'on a $\theta > 0$ et < 1, nous pouvons remplacer les dernières inégalités par l'équation

$$\left[\frac{1.2.3\ldots m}{1.3.5\ldots(2m-1)}\right]^2 = \frac{(2m+\theta)\pi}{2^{2m+1}}.$$

En faisant, dans cette formule, $m = \frac{n-1}{2}$ pour n impair, et $m = \frac{n}{2}$ pour n pair, nous obtenons

$$\left[\frac{1.2.3\ldots\frac{n-1}{2}}{1.3.5\ldots(n-2)}\right]^2 = \frac{\pi}{2^n}(n-1+\theta)$$

et

$$\left[\frac{1.2.3\ldots\frac{n}{2}}{1.3.5\ldots(n-1)}\right]^2 = \frac{\pi}{2^{n+1}}(n+\theta).$$

Or, comme la valeur de ζ n'est limitée que par zéro et 1, et que la différence $1-\zeta$ se trouve dans le même cas, cette différence pourra être remplacée dans la formule ci-dessus par ζ, ce qui nous permettra de simplifier les formules où figure cette différence et d'écrire

$$\left[\frac{1.2.3\ldots\frac{n-1}{2}}{1.3.5\ldots n}\right]^2 \ldots \frac{\ldots}{2}\, n \ldots$$

Comparant les égalités que nous venons d'obtenir avec les expressions de L du n° 6, nous voyons que ces dernières peuvent être remplacées par

$$L = \frac{n\pm1}{n-1}\,\frac{n-\zeta}{2}\pi, \qquad L = \frac{n-\zeta}{2}\pi.$$

En examinant ces valeurs de L, nous remarquons qu'on obtient la limite inférieure de L par la formule $L = \frac{n\pm1}{n-1}\,\frac{n-\zeta}{2}\pi$, en y faisant $\zeta = 1$ et en prenant ± 1 avec le signe $+$, de façon que cette valeur limite devient $\frac{n+1}{2}\pi$. On voit ainsi que L surpassera toujours $\frac{n+1}{2}\pi$, et nous sommes amené au théorème que voici :

Théorème. — *La valeur numérique du polynôme*

$$x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n,$$

depuis $x = +1$ et $x = -1$, doit surpasser $\frac{n+1}{2}\pi$, si ce polynôme ne cesse de croître ou de décroître entre ces limites de la variable x.

Si nous faisons, dans nos formules,

$$x = \frac{2z-a-b}{b-a},$$

et si nous remarquons que, dans ce cas, le polynôme

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$

étant multiplié par $\left(\frac{b-a}{2}\right)^n$ se réduit à un polynôme de la forme

$$z^n + A'z^{n-1} + A''z^{n-2} + \dots,$$

et que les limites de la nouvelle variable z deviennent $z = a$ pour $x = -1$, et $z = b$ pour $x = +1$, nous déduisons du théorème précédent le nouveau théorème que voici :

Théorème. — *La valeur numérique du polynôme*

$$z^n + A'z^{n-1} + A''z^{n-2} + \dots,$$

depuis $z = b$ jusqu'à $z = a$, doit surpasser $(n-1)\left(\frac{b-a}{4}\right)^n\pi$, si ce polynôme ne cesse de croître ou de décroître entre ces limites.

Or, à l'aide de ce dernier théorème, il nous sera aisé de conclure :

Théorème. — *Si la valeur numérique de $f(b) - f(a)$, différence de la valeur de $f(z) = z^n + A'z^{n-1} + A''z^{n-2} + \dots$, pour $z = a$ et $z = b$, ne peut surpasser la limite $2(n-1)\left(\frac{b-a}{4}\right)^n\pi$, la dérivée $f'(z)$ change de signe entre $z = a$ et $z = b$.*

En effet, si $f'(z)$ ne changeait pas de signe entre $z = a$ et $z = b$, le polynôme

$$\Phi(z) = f(z) - \frac{f(b) + f(a)}{2},$$

ne cesserait d'être, entre ces limites, ou constamment croissant, ou constamment décroissant, de façon que toutes ses valeurs, depuis $z = a$ jusqu'à $z = b$, seraient comprises entre ses deux valeurs extrêmes, qui correspondent aux valeurs limites de z que nous venons d'indiquer, et qui se réduisent à

$$\Phi(a) = -\frac{1}{2}[f(b) - f(a)],$$
$$\Phi(b) = \frac{1}{2}[f(b) - f(a)].$$

On voit ainsi que, depuis $z = a$ jusqu'à $z = b$, la valeur numérique

de $\Phi(x)$ ne surpasserait pas celle de

$$\frac{1}{2}[f(b) - f(a)],$$

c'est-à-dire ne saurait être supérieure, d'après les conditions du théorème énoncé ci-dessus, à

$$\frac{1}{2}\,2(n-1)\left(\frac{b-a}{4}\right)^n\pi = (n-1)\left(\frac{b-a}{4}\right)\pi$$

ce qui est impossible en vertu du théorème précédent.

Faisons

$$F(z) = (m+1)\int_a^z (z^m + B_1 z^{m-1} + B_2 z^{m-2} + \ldots)\,dz.$$

La fonction $F(z)$ se réduit, dans ce cas, au polynôme

$$z^n + A' z^{n-1} + A'' z^{n-2} + \ldots$$

où $n = m + 1$ et la dérivée premiere de $F(z)$ est

$$F'(z) = (m+1)(z^m + B_1 z^{m-1} + B_2 z^{m-2} + \ldots).$$

On a donc

$$F(b) - F(a) = (m+1)\int_a^b (x^m + B_1 x^{m-1} + B_2 x^{m-2} + \ldots)\,dx.$$

Nous en concluons le théorème que voici :

Théorème. — *L'équation* $z^m + B_1 z^{m-1} + B_2 z^{m-2} + \ldots = 0$ *doit nécessairement avoir au moins une racine entre* $z = a$ *et* $z = b$, *si la valeur numérique de l'intégrale*

$$\int_a^b (z^m + B_1 z^{m-1} + B_2 z^{m-2} + \ldots)\,dz$$

ne dépasse pas la valeur de

$$\frac{2m}{m+1}\pi\left(\frac{b-a}{4}\right)^{m+1}.$$

A l'aide du même théorème, il sera aisé d'établir un théorème nouveau, concernant la série de fonctions

$$f(z),\quad f'(z),\quad f''(z),\ \ldots,\quad f^{n-1}(z),\quad f^{n}(z),$$

qui servent à déterminer les racines d'après la méthode de Fourier.

THÉORÈME. — *Quelle que soit la valeur t, si l'on prend dans l'expression $t \mp 4\sqrt[2n]{\frac{f(t)}{4(n-1)\pi}}$ le radical avec un signe contraire à celui de la fraction $\frac{f'(t)}{f(t)}$, le nombre des variations de signes dans la série*

$$f(z),\quad f'(z),\ \ldots,\quad f^{n-1}(z),\quad f^{n}(z),$$

où

$$f(z) = z^n + A'z^{n-1} + A''z^{n-2} + \ldots,$$

ne saurait rester le même, si l'on y met consécutivement pour z la valeur de t et celle de $t \pm 4\sqrt[2n]{\frac{f(t)}{4(n-1)\pi}}$.

Il se présente plusieurs cas différents dans la démonstration de ce théorème, suivant le signe des quantités $f(t)$ et $f'(t)$. Nous nous bornerons à considérer le cas où ces deux quantités auront le signe $+$; mais le raisonnement que nous suivrons dans cette occasion s'appliquera facilement à tous les autres cas.

En supposant les deux grandeurs $f(t)$ et $f'(t)$ positives, nous devrons prendre dans l'expression $t \pm 4\sqrt[2n]{\frac{f(t)}{4(n-1)\pi}}$ le radical avec le signe $-$, et nous aurons à démontrer que, dans le cas de

$$f(t) > 0 \quad \text{et} \quad f'(t) > 0,$$

le nombre de variations de signes de la série

$$f(z),\quad f'(z),\quad f''(z),\ \ldots,\quad f^{n-1}(z),\quad f^{n}(z)$$

n'est pas le même pour $z = t$ et pour $z = t - 4\sqrt[2n]{\frac{f(t)}{4(n-1)\pi}}$.

Pour le démontrer, nous observerons qu'il est évident que toutes les fois qu'entre les limites indiquées ci-dessus l'une des deux fonctions $f(z)$ ou $f'(z)$, ou toutes les deux à la fois, s'évanouissent, le nombre des variations de signes dans la série

$$f(z),\quad f'(z),\ldots,\quad f^{(n-1)}(z),\quad f^{(n)}(z)$$

doit varier; quant à l'hypothèse qu'aucune de ces fonctions ne devient zéro entre les limites que nous considérons, il est aisé de démontrer, à l'aide du théorème précédent, qu'elle ne peut avoir lieu.

En effet, si $f(t) > 0$ et $f'(t) > 0$, et si en même temps les équations $f(z) = 0$ et $f'(z) = 0$ n'avaient pas de racines entre

$$z = t \quad \text{et} \quad z = t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}},$$

les fonctions $f(z)$ et $f'(z)$ devraient conserver, entre ces limites, le signe $+$: donc on aurait

$$f\left[t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}\right] > 0 \quad \text{et} \quad f\left[t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}\right] < f(t),$$

et la valeur numérique de

$$f(t) - f\left[t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}\right]$$

devrait être inférieure à la valeur numérique de $f(t)$, ce qui, en vertu d'un théorème précédent, est impossible; car la différence $f(b) - f(a)$ pour $b = t$ et $a = t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}$, d'après ce théorème, doit surpasser

$$2(n-1)\pi\left(\frac{b-a}{4}\right)^n = 2(n-1)\pi\left[\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}\right]^n = f(t).$$

En appliquant ce dernier théorème au cas où l'équation

$$z^n + A'z^{n-1} + A''z^{n-2} + \ldots = 0$$

n'a pas de racines imaginaires, et observant que dans ce cas tout chan-

gement du nombre des variations de signes de la série

$$f(z),\quad f'(z),\ldots,\quad f^{(n-1)}(z),\quad f^{(n)}(z)$$

indique la présence d'une racine de l'équation $f(z) = 0$ entre les valeurs de z, nous sommes conduit au théorème que voici :

Théorème. — *Quelle que soit la grandeur t, on trouvera toujours au moins une racine de l'équation $f(z) = z^n + A' z^{n-1} + A'' z^{n-2} + \ldots = 0$, entre les limites t et $t \pm \sqrt[2n]{4\frac{f^2(t)}{(n-1)^2\pi^2}}$, en prenant dans ce dernier radical le signe contraire à celui de la fraction $\frac{f(t)}{f'(t)}$, si toutefois l'équation proposée n'a pas de racines imaginaires.*

Mémoire sur la théorie algébrique des formes quadratiques;

PAR M. G. DARBOUX.

Considérons une forme quadratique homogène à n variables

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

que nous écrirons aussi de la manière suivante :

$$\sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j,$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs 1, 2, 3,..., n de i et de j. Nous supposerons, suivant l'usage, $a_{ji} = a_{ij}$; par suite un terme rectangle se trouvera deux fois dans la somme précédente avec le même coefficient, et l'expression développée de la forme sera

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \ldots + a_{nn} x_n^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + \ldots.$$

Le polynôme

$$(1) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

sera dit l'*invariant* ou le *déterminant* de la forme, et nous désignerons par Δ_1, Δ_2,... les invariants des formes qu'on obtient en annulant dans la forme proposée successivement x_n, puis x_n, x_{n-1} puis x_n, x_{n-1}, x_{n-2},... On aura ainsi

$$(2) \qquad \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,n-i} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n-i,1} & \ldots & a_{n-i,n-i} \end{vmatrix}.$$

Cela posé, réduisons, par les procédés connus, f à une somme de carrés de la forme suivante :

$$f = \varepsilon_1 (x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n)^2 + \varepsilon_2 (x_2 + \beta_3 x_3 + \ldots + \beta_n x_n)^2 + \ldots$$
$$+ \varepsilon_{n-1} (x_{n-1} + \lambda_n x_n)^2 + \varepsilon_n x_n^2 ;$$

on trouvera, comme l'a prouvé M. Hermite,

$$\varepsilon_1 = \Delta_{n-1}, \ldots, \quad \varepsilon_{n-1} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \quad \varepsilon_n = \frac{\Delta}{\Delta_1} ;$$

et par suite on aura

$$(3) \qquad f = \Delta_{n-1} X_1^2 + \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}} X_2^2 + \ldots + \frac{\Delta}{\Delta_1} X_n^2 ,$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant des fonctions linéaires des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Il résulte de cette décomposition de f que le nombre des carrés positifs de la forme est égal à celui des permanences de la suite

$$(4) \qquad \Delta, \ \Delta_1, \ \Delta_2, \ldots, \ \Delta_{n-1}, \ 1 ;$$

quant aux fonctions linéaires X_i, elles ont été mises sous la forme de déterminants par divers géomètres et notamment par M. Weierstrass. Nous ne donnerons pas l'expression de ces fonctions, parce qu'elle résultera, comme cas particulier, des formules que nous établirons dans la suite de ce travail.

La décomposition en carrés qui précède peut devenir impossible si l'une des quantités Δ_i est nulle, et d'ailleurs elle est très-particulière. Nous nous proposerons d'abord de donner, et sous diverses formes, la décomposition en carrés la plus générale d'une forme quadratique. La résolution complète de cette question se rattache à l'étude d'une série de formes quadratiques dérivées de la forme f et contenant plusieurs groupes de variables. Comme elles jouent un rôle essentiel dans toutes les recherches relatives aux formes quadratiques, quelques-unes d'entre elles ont déjà été employées, et elles se présentent d'ailleurs de la manière la plus naturelle dans l'application de l'Analyse à l'étude des coniques et des quadriques. La suite de ce travail montrera, nous l'espérons, tout l'avantage qu'il y a à les introduire nettement et à en étudier d'une manière générale les propriétés les plus importantes.

I.

Définissons la fonction Φ_p par la relation suivante

$$(5)\qquad \Phi_p = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & X_1^1 & X_1^2 & \ldots & X_1^p \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} & X_2^1 & X_2^2 & \ldots & X_2^p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & X_n^1 & X_n^2 & \ldots & X_n^p \\ X_1^1 & \ldots & X_n^1 & 0 & & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_1^p & \ldots & X_n^p & 0 & & & 0 \end{vmatrix}.$$

La fonction Φ_p contient p séries de variables

$$X_1^i, \ldots, X_n^i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, p,$$

et elle est quadratique par rapport à chacune de ces séries. Ajoutons qu'elle est une fonction homogène et du degré $n-p$ des coefficients a_{ij} de la forme fondamentale; car elle est une fonction *linéaire* des mineurs du $p^{\text{ième}}$ ordre de l'invariant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

que nous désignerons par Φ_0 pour conserver la symétrie dans les notations.

La première de ces fonctions

$$(6)\qquad \Phi_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & X_1^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & X_n^1 \\ X_1^1 & \ldots & X_n^1 & 0 \end{vmatrix}$$

est au signe près la fonction adjointe de Gauss. En la développant, on peut écrire

$$(7)\qquad -\Phi_1 = \sum \frac{\partial\Phi}{\partial a_{ij}} X_i^1 X_j^1.$$

et l'on a de même d'une manière générale

$$(8) \qquad -\Phi_{p+1} = \sum \frac{d\Phi_p}{da_{ij}} X_i^{p+1} X_j^{p+1}.$$

La forme Φ_n se réduit évidemment à

$$(9) \qquad \Phi_n = (-1)^n \begin{vmatrix} X_1^1 & \dots & X_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ X_n^1 & \dots & X_n^n \end{vmatrix}^2.$$

D'ailleurs l'indice p de Φ_p ne peut dépasser n, car pour $p > n$ le déterminant Φ_p s'annule identiquement. On obtient donc seulement une suite de $n+1$ fonctions

$$\Phi_0, \ \Phi_1, \ \dots, \ \Phi_n,$$

des degrés n, $n-1, \dots, 1, 0$ par rapport aux coefficients de la forme f et contenant $0, 1, 2, \dots, n$ séries de variables.

Quand il sera nécessaire d'indiquer les systèmes d'arbitraires qui figurent dans les fonctions Φ_p, on représentera chacune des séries de variables de la manière suivante :

$$X_1^i, \ X_2^i, \ \dots, \ X_n^i.$$

Chaque série sera distinguée par l'indice supérieur et l'on emploiera la notation suivante :

$$(10) \qquad \left\{ \begin{matrix} X^1 & X^2 & \dots & X^p \\ Y^1 & Y^2 & \dots & Y^p \end{matrix} \right\} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & X_1^1 & \dots & X_1^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & X_n^1 & \dots & X_n^p \\ Y_1^1 & \dots & Y_n^1 & 0 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & & \\ Y_1^p & \dots & Y_n^p & 0 & & 0 \end{vmatrix},$$

qui s'applique, comme l'on voit, à des fonctions plus générales qu'on pourrait appeler les polaires des formes Φ_p. On aura alors

$$(11) \qquad \Phi_p = \left\{ \begin{matrix} X^1 & \dots & X^p \\ X^1 & \dots & X^p \end{matrix} \right\}.$$

Un théorème bien connu, concernant les mineurs du premier ordre d'un déterminant, nous donnera la relation

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{cccc} X^1 & \ldots & X^{p-1} & X^p \\ Y^1 & \ldots & Y^{p-1} & Y^p \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{cccc} X^1 & \ldots & X^{p-1} & X^{p+1} \\ Y^1 & \ldots & Y^{p-1} & Y^{p+1} \end{array}\right\} \\ - \left\{\begin{array}{cccc} X^1 & \ldots & X^{p-1} & X^{p+1} \\ Y^1 & \ldots & Y^{p-1} & Y^p \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{cccc} X^1 & \ldots & X^{p-1} & X^p \\ Y^1 & \ldots & Y^{p-1} & Y^{p+1} \end{array}\right\} \\ = \left\{\begin{array}{ccc} X^1 & \ldots & X^{p-1} \\ Y^1 & \ldots & Y^{p-1} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{ccccc} X^1 & \ldots & X^{p-1} & X^p & X^{p+1} \\ Y^1 & \ldots & Y^{p-1} & Y^p & Y^{p+1} \end{array}\right\}, \end{array}\right.$$

qui servira de base principale à nos recherches.

II.

Voyons d'abord ce que deviennent les formes précédentes quand on soumet les variables x_i à une substitution linéaire. Nous supposerons qu'alors les variables $X_1^i, X_2^i, \ldots, X_n^i$ seront transformées par la substitution inverse, de telle manière que la fonction

$$X_1^i x_1 + X_2^i x_2 + \ldots + X_n^i x_n$$

se reproduise identiquement après une transformation quelconque.

Cette définition étant admise, il est facile d'établir que les fonctions Φ_p se reproduiront, multipliées par le carré du déterminant de la substitution.

Pour le prouver, introduisons la forme auxiliaire

$$\begin{aligned} F = f(x_1 x_2 \ldots x_n) &+ 2t_1(X_1^1 x_1 + \ldots + X_n^1 x_n) + \ldots \\ &+ 2t_p(X_1^p x_1 + \ldots + X_n^p x_n), \end{aligned}$$

à $n+p$ variables $x_1, \ldots, x_n$, $t_1, \ldots, t_p$, où les X_2^i sont regardés comme des coefficients. L'invariant de F sera précisément Φ_p.

Cela posé, effectuons dans F la double substitution définie par les formules

$$x_i = \sum_j \alpha_{ij} x'_j \text{ au déterminant } \delta, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

$$t_q = t'_q, \quad q = 1, 2, 3, \ldots, p.$$

Le déterminant de l'ensemble de ces substitutions sera δ. Appelons F′ ce que devient F par cette substitution. Son invariant sera, cela est évident, la nouvelle valeur Φ'_p de Φ_p et comme, d'après un théorème connu, cet invariant se reproduit multiplié par le carré du déterminant de la substitution, on aura

$$\Phi'_p = \delta^2 \Phi_p.$$

Donc *les fonctions Φ_p sont des contrevariants qui se reproduisent multipliés par le carré du déterminant de la substitution.*

III.

On peut établir la propriété générale suivante des fonctions Φ_p :

Le nombre des carrés positifs de la forme f est égal à celui des variations de signes que présente la suite $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$, quelles que soient les valeurs des arbitraires X_i^α qui figurent dans les formes Φ_p.

Pour démontrer cette proposition, nous allons mettre en évidence une décomposition en carrés de la forme f. A cet effet, nous désignons par

$$X_1, X_2, \ldots, X_n,$$

sans indice supérieur les demi-dérivées de f par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On sait que f peut se représenter par la formule

$$(13)\qquad \Phi_0 f = - \begin{vmatrix} a_{11} & . & a_{1n} & X_1 \\ \ldots & . & \ldots & .. \\ a_{n1} & .. & a_{nn} & X_n \\ X_1 & \ldots & X_n & 0 \end{vmatrix},$$

qui n'est autre chose que l'équation bien connue de Gauss, relative à la forme adjointe. Du reste, on vérifie immédiatement cette formule en retranchant de la dernière colonne du déterminant qui figure dans le second membre les n premières multipliées respectivement par $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Cela posé, partons de l'identité

$$(14)\quad \left\{\begin{matrix} X^1 & \ldots & X^n X \\ X^1 & \ldots & X^n X \end{matrix}\right\} - \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & X_1^1 & \ldots & X_1^n & X_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & X_n^1 & \ldots & X_n^n & X_n \\ X_1^1 & \ldots & X_n^1 & 0 & & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & & \\ X_1^n & \ldots & X_n^n & 0 & & & 0 \\ X_1 & \ldots & X_n & 0 & & & 0 \end{vmatrix} = 0$$

et appliquons successivement la formule (12). En posant

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\Phi_p = \left\{\begin{matrix} X^1 & \ldots & X^p \\ X^1 & \ldots & X^p \end{matrix}\right\}, \quad R_p = \left\{\begin{matrix} X^1 & \ldots & X^{n-p} X \\ X^1 & \ldots & X^{n-p} X \end{matrix}\right\}, \\ &\qquad\qquad A_p = \left\{\begin{matrix} X^1 & \ldots & X^{n-p} X \\ X^1 & \ldots & X^{n-p} X^{n-p+1} \end{matrix}\right\}, \end{aligned}\right.$$

on déduira de cette formule la suivante :

$$R_p \Phi_{n-p+1} - A_p^2 = R_{p-1} \Phi_{n-p}.$$

En donnant à p diverses valeurs, nous obtenons le tableau suivant :

$$\begin{aligned} &R_1 \Phi_n && - A_1^2 = 0, \\ &R_2 \Phi_{n-1} && - A_2^2 = R_1 \Phi_{n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\ldots \\ &R_p \Phi_{n-p+1} && - A_p^2 = R_{p-1} \Phi_{n-p}, \\ &\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\ldots \\ &R_n \Phi_1 && - A_n^2 = R_{n-1} \Phi_0. \end{aligned}$$

Dans la première de ces égalités, le second membre est nul, en vertu de la formule (14). Ajoutons la formule (13)

$$f \Phi_0 = R_n,$$

et nous aurons un système d'identités propre à faire connaître R_1, $R_2, \ldots, R_n$, f qui sont des fonctions quadratiques au moyen de A_1,

$A_2, \ldots, A_r$ qui sont des fonctions linéaires des demi-dérivées de la forme f. Nous obtenons ainsi

$$R_1 = \frac{A_1^2}{\Phi_1} + \ldots [illegible]$$

en général

(16) $$\frac{R_i}{[illegible]} = \frac{A_{i+1}^2}{[illegible]} + \frac{A^2}{[illegible]} + \ldots + \frac{A_r^2}{[illegible]}$$

et enfin

(17) $$f = -\frac{A_1^2}{[illegible]} - \frac{A_2^2}{[illegible]} - \ldots - \frac{A_{r-1}^2}{\Phi_{r-2}\Phi_{r-1}} - \frac{A_r^2}{\Phi_{r-1}\Phi_r};$$

c'est la décomposition en carrés cherchée. On voit qu'il y a autant de carrés positifs que de variations de signes dans la suite

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_r,$$

et ainsi se trouve établie la proposition que nous avions en vue.

D'après les équations (15), on a

$$A_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & X_1^1 & \ldots & X_1^{n-r} & X_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & X_n^1 & \ldots & X_n^{n-r} & X_n \\ X_1^1 & \ldots & X_n^1 & 0 & & & 0 \\ \ldots & & \ldots & & & & \\ X_1^{n-r} & \ldots & X_n^{n-r} & 0 & & & 0 \\ X_1^{n-r+1} & \ldots & X_n^{n-r+1} & 0 & & & 0 \end{vmatrix}$$

Si de la dernière colonne on retranche les n premières multipliées respectivement par $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on trouve

$$A_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & X_1^1 & \ldots & X_1^{n-r} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & X_n^1 & \ldots & X_n^{n-r} & 0 \\ X_1^1 & \ldots & X_n^1 & 0 & \ldots & 0 & U_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & U_2 \\ X_1^{n-r+1} & \ldots & X_n^{n-r+1} & 0 & \ldots & 0 & U_{n-r+1} \end{vmatrix},$$

en posant

$$U_i = X_1^i x_1 + X_2^i x_2 + \ldots + X_n^i x_n.$$

On voit, en développant suivant les éléments de la dernière colonne, que A_p est de la forme

$$(18) \qquad A_p = b_{p1} U_1 + \ldots + b_{p,n-p+1} U_{n-p+1};$$

si donc on effectue sur la forme f la substitution définie par les formules

$$(19) \qquad U_1 = x'_1, \ldots, \quad U_n = x'_n,$$

A_n ne contiendra que x'_1; A_{n-1} que x'_1, x'_2; A_{n-p} que $x'_1, \ldots, x'_{p+1}$. On retrouve ainsi, après la substitution (19), la décomposition en carrés particulière dont il a été question au début de ce travail. Cette remarque met en évidence ce fait essentiel que *nous avons ici la décomposition en carrés la plus générale de notre forme*, car il est clair que cette décomposition, la plus générale, peut toujours s'obtenir d'abord en effectuant sur les variables x_i une substitution arbitraire telle que celle qui a été définie par les équations (19), puis en appliquant le procédé de Gauss que nous avons d'abord rappelé.

IV.

Nous allons maintenant étudier plus complètement les fonctions Φ_p et en particulier discuter d'une manière précise les conditions de possibilité de la décomposition en carrés donnée par la formule (17).

Nous avons vu que la fraction Φ_p, qui contient p systèmes de variables

$$X_1^1, \ldots, X_n^1, \ldots, \quad X_1^p, \ldots, X_n^p,$$

peut être considérée comme une forme quadratique des variables de chaque système. La remarque suivante indique une propriété essentielle des fonctions Φ_p considérées sous ce point de vue.

Par suite même de l'équation de définition, il est clair que Φ_p ne changera pas si l'on remplace les variables de l'un des systèmes X_1^p,

X par exemple, par les suivantes :

$$X_1^p + \lambda_1 X_1^{p-1} + \ldots + \lambda_{p-1} X_1^1,$$
$$X_2^p + \lambda_1 X_2^{p-1} + \ldots + \lambda_{p-1} X_2^1.$$

Cela revient en effet à ajouter à la dernière ligne et à la dernière colonne du déterminant Φ_p d'autres lignes et d'autres colonnes multipliées par $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}$. Il suit de là que Φ_p, considérée comme fonction des seules variables X_k^i, n'est pas une forme quadratique générale et ne dépend au fond que de $n - p + 1$ fonctions linéaires de ces variables. C'est en effet ce que montre la formule (16). R_p n'est autre chose que la fonction Φ_{n-p+1}, dans laquelle on a remplacé la dernière série d'arbitraires par $X_1, X_2, \ldots, X_n$, et l'on voit que R_p, considérée comme fonction de ces seules variables, se réduit bien à une somme de p carrés et ne dépend par conséquent que de p fonctions linéaires de ces variables.

Les fonctions Φ_p nous conduisent aussi à une classification des formes quadratiques. Nous nous appuierons sur la proposition suivante : *La fonction Φ_p ne peut être identiquement nulle que si tous les mineurs d'ordre p du déterminant de la forme sont nuls, et alors toutes les fonctions précédentes $\Phi_{p-1}, \ldots, \Phi_0$ sont aussi identiquement nulles.*

En effet, si une forme quadratique $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ est identiquement nulle, il en est de même de ses dérivées, et par suite de la polaire

$$y_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \ldots + y_m \frac{\partial F}{\partial x_m}.$$

Appliquant cette remarque aux différentes séries de variables que contient la forme Φ_p, nous voyons qu'elle sera identiquement nulle en même temps que la suivante :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & X_1^1 & \ldots & X_1^p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & X_n^1 & \ldots & X_n^p \\ Y_1^1 & \ldots & Y_n^1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Y_1^p & \ldots & Y_n^p & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Or on peut maintenant disposer des variables X, Y en leur donnant les valeurs o, 1, — 1, de telle manière que cette forme se réduise à l'un quelconque des mineurs d'ordre p de l'invariant. Il faut donc que tous ces mineurs soient nuls, ce qui démontre la première partie de la proposition.

D'ailleurs, si tous les mineurs d'ordre p sont nuls, il en est de même de tous les mineurs d'ordre $p-q$, et la forme Φ_{p-q}, qui est une fonction linéaire de ces mineurs, sera identiquement nulle.

Ce premier point étant établi, on peut démontrer que, *si pour un certain système de valeurs des variables Φ_p n'est pas nul, on pourra toujours choisir les nouvelles variables qui entrent dans Φ_{p+1}, de telle manière que cette nouvelle forme ne soit pas nulle.*

En effet, d'après l'équation (8), on a

$$\Phi_{p+1} = -\sum \frac{\partial \Phi_p}{\partial a_{ij}} X_i^{p+1} X_j^{p+1}.$$

Si donc Φ_{p+1} est nulle, quelles que soient les nouvelles variables, on aura

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial a_{ij}} = 0.$$

Toutes les dérivées de Φ_p, par rapport aux coefficients a_{ij}, étant nulles, et Φ_p étant une fonction homogène de ces coefficients, Φ_p devrait aussi être nulle, ce qui est contraire aux hypothèses faites. On pourra donc toujours choisir les X_α^{p+1} de telle manière, que Φ_{p+1} ne soit pas nulle. En continuant ces raisonnements, on obtient la proposition suivante :

Quand une des fonctions Φ_p ne sera pas nulle, on pourra toujours disposer des nouvelles arbitraires entrant dans les formes suivantes, de telle manière que $\Phi_{p+1}, \Phi_{p+2}, \ldots, \Phi_n$ ne soient pas nulles.

Ces propositions préliminaires étant admises, considérons une forme f pour laquelle, tous les mineurs du $p-1^{ième}$ ordre de l'invariant étant nuls, ceux de l'ordre p ne le sont pas tous. On pourra, d'après ce qui précède, disposer des arbitraires contenues dans les formes Φ, de telle manière que $\Phi_p, \Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_n$ soient différentes de zéro; mais Φ_0,

$\Phi_1, \dots, \Phi_{p-1}$ seront identiquement nulles. Examinons ce que devient alors notre décomposition en carrés.

La formule (16) nous donnera

$$(20) \qquad \frac{R_p}{\Phi_p} = \frac{A_1^2}{\Phi_p \Phi_{p+1}} + \frac{A_2^2}{\Phi_{p+1}\Phi_{p+2}} + \dots + \frac{A_{n-p}^2}{\Phi_{n-1}\Phi_n}.$$

On a

$$(21) \qquad R_p = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & X_1^1 & \dots & X_1^p & X_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & X_n^1 & \dots & X_n^p & X_n \\ X_1^1 & \dots & X_n^1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_1^p & \dots & X_n^p & 0 & \dots & \dots & 0 \\ X_1 & \dots & X_n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Multiplions les n premières colonnes par $-x_1, -x_2, -x_n$; ajoutons-les à la dernière, et opérons de même pour les lignes. Nous trouverons

$$(22) \qquad R_p = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & X_1^1 & X_1^p & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & X_n^1 & X_n^p & \dots & 0 \\ X_1^1 & \dots & X_n^1 & 0 & 0 & \dots & -U_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_1^p & \dots & X_n^p & 0 & 0 & \dots & -U_p \\ 0 & \dots & 0 & -U_1 & -U_2 & \dots\ -U_p & -f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{vmatrix},$$

$U_1, U_2, \dots, U_p$ étant des fonctions linéaires qui disparaîtront dans le développement; car leurs coefficients sont des fonctions linéaires des mineurs d'ordre $p-1$; il reste donc

$$(23) \qquad R_p = -\Phi_p f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

et, par suite, en substituant dans la formule (20),

$$(24) \qquad f(x_1, \dots, x_n) = -\frac{A_1^2}{\Phi_p\Phi_{p+1}} - \frac{A_2^2}{\Phi_{p+1}\Phi_{p+2}} - \dots - \frac{A_{n-p}^2}{\Phi_{n-1}\Phi_n}.$$

Ainsi la forme se réduit, dans le cas qui nous occupe, à une somme de

$n-p$ carrés, et par conséquent ne dépend, au fond, que de $n-p$ variables, fonctions linéaires des n premières.

Il est facile de montrer qu'elle ne peut dépendre d'un moindre nombre de variables; car, si l'on pouvait l'exprimer en fonction de $n-p-q$ variables $y_1, \dots, y_{n-p-q}$, alors, en effectuant une substitution et exprimant $x_1, x_2, \dots, x_n$ en fonction linéaire de $y_1, y_2, \dots, y_{n-p-q}$, et de $p+q$ autres variables, tous les coefficients des termes où devraient figurer ces autres variables seraient nuls; il y aurait donc dans le déterminant de la forme $p+q$ lignes dont tous les éléments seraient nuls, et par suite tous les mineurs d'ordre $p+q-1$ de ce déterminant seraient nuls; la forme Φ_p, qui est une fonction linéaire des mineurs d'ordre p, serait donc identiquement nulle. Or cette forme, étant identiquement nulle après la substitution, devrait l'être avec les variables primitives, ce qui est contraire aux hypothèses adoptées.

Nous obtenons ainsi une classification très-remarquable et très-simple des formes quadratiques d'après la considération de la suite Φ_0, $\Phi_1, \dots, \Phi_n$. Il y aura n classes de formes. Pour la classe zéro, composée des formes les plus générales, Φ_0 ne sera pas nulle; pour la $p^{\text{ième}}$ classe, les p premières fonctions $\Phi_0, \dots, \Phi_{p-1}$ seront identiquement nulles sans que Φ_p le soit. Les formes de la $p^{\text{ième}}$ classe ne dépendent que de $n-p$ variables. Remarquons, de plus, que, dans ce cas, la suite

$$\Phi_p, \Phi_{p+1}, \dots, \Phi_n,$$

réduite à $n+1-p$ fonctions, conserve la propriété d'indiquer par le nombre de ses variations celui des carrés positifs de la forme.

V.

Arrêtons-nous un instant à la classification que nous venons de faire, afin de bien marquer les caractères essentiels des différentes classes que nous venons de distinguer.

Si l'on considère le système suivant d'équations du premier degré :

$$(25)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}f'_{x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ \frac{1}{2}f'_{x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \frac{1}{2}f'_{x_n} = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases}$$

à chaque classe de formes correspondront des propriétés particulières des solutions. Pour les formes générales, le déterminant Φ_n n'étant pas nul, les équations précédentes ne donneront que la solution inadmissible en coordonnées homogènes $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$; mais, pour la $p^{\text{ième}}$ classe, les équations précédentes se réduiront à $n - p$ distinctes. Cela résulte de la théorie bien connue des équations du premier degré. Par exemple, si le mineur

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1,n-p} \\ a_{21} & \ldots & \ldots & a_{2,n-p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-p,1} & \ldots & \ldots & a_{n-p,n-p} \end{vmatrix}$$

d'ordre p n'est pas nul, on pourra des $n - p$ premières équations tirer $x_1, x_2, \ldots, x_{n-p}$ en fonction de $x_{n-p+1}, \ldots, x_n$, et, en portant ces valeurs dans les dernières équations, les premiers membres de ces équations deviendront des fonctions linéaires des mineurs d'ordre $p - 1$, tous nuls par hypothèse, et par conséquent ces équations seront identiquement satisfaites. Il suit de là qu'il y aura p systèmes de solutions des équations précédentes

$$(26)\qquad \begin{cases} x_1 = u_1^1, \ldots, x_n = u_n^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 = u_1^p, \ldots, x_n = u_n^p, \end{cases}$$

linéairement indépendants, au moyen desquels le système le plus général de solutions se composera de la manière suivante :

$$(27)\qquad \begin{cases} x_1 = \lambda^1 u_1^1 + \lambda^2 u_1^2 + \ldots + \lambda^p u_1^p = v_1, \\ x_2 = \lambda^1 u_2^1 + \lambda^2 u_2^2 + \ldots + \lambda^p u_2^p = v_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \lambda^1 u_n^1 + \lambda^2 u_n^2 + \ldots + \lambda^p u_n^p = v_n, \end{cases}$$

$\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^p$ étant des arbitraires quelconques. D'ailleurs, tous les systèmes $v_1, \ldots, v_n$, donnés par les formules précédentes et satisfaisant aux équations (25), possèdent de nombreuses propriétés.

1° On a identiquement

$$f'_1 = 0,\quad f'_2 = 0, \ldots, f'_n = 0.$$

et, par suite,

$$v_1 f'_{x_1} + \ldots + v_n f'_{x_n} = x_1 f'_{v_1} + \ldots + x_n f'_{v_n} = 0.$$

L'identité précédente constitue une relation linéaire identique entre les n dérivées $f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_n}$. Il y a donc autant de relations de ce genre qu'il y a de systèmes $v_1, \ldots, v_n$ linéairement indépendants, ce qui donne les p équations suivantes :

$$(28)\qquad \begin{cases} u_1^1 f'_{x_1} + \ldots + u_n^1 f'_{x_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1^p f'_{x_1} + \ldots + u_n^p f'_{x_n} = 0. \end{cases}$$

Réciproquement, toute relation identique entre les dérivées

$$\alpha'_1 f'_{x_1} + \ldots + \alpha'_n f'_{x_n} = 0$$

entraîne les équations

$$f'_{\alpha'_1}(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) = 0, \quad \ldots = 0, \quad f'_{\alpha'_n} = 0,$$

ce qui montre que $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ forment un système de solutions des équations (25). Il n'y a donc pas d'autres relations entre les dérivées que les équations (28) et leurs combinaisons linéaires.

Ainsi, il y a p relations linéaires distinctes entre les dérivées d'une forme de la $p^{\text{ième}}$ classe.

2° On a identiquement

$$f(x_1 + v_1, \ldots, x_n + v_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + x_1 f'_{v_1} + \ldots + x_n f'_{v_n} + f(v_1, v_2, \ldots, v_n),$$

et comme

$$f'_{v_1} = 0, \ldots, \quad f'_{v_n} = 0, \quad 2f(v_1, \ldots, v_n) = v_1 f'_{v_1} + \ldots + v_n f'_{v_n} = 0,$$

il suit que l'on aura

$$(29)\qquad f(x_1 + v_1, \ldots, x_n + v_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Cette équation est importante, car on peut toujours disposer des arbitraires $\lambda^1,\dots,\lambda^p$ contenues dans $v_1,\dots,v_n$ de manière à annuler p des variables $x_1+v_1,\dots,x_n+v_n$.

En effet, tous les déterminants qu'on peut former en prenant p colonnes dans le système suivant :

$$\begin{vmatrix} u_1^1 & \dots & u_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^p & \dots & u_n^p \end{vmatrix},$$

ne sont pas nuls, sans quoi les p systèmes de solutions u ne seraient pas linéairement indépendants. Supposons, par exemple, que celui qu'on obtient en prenant les p premières colonnes ne soit pas nul. Alors on pourra déterminer $\lambda^1,\dots,\lambda^p$ par les équations

$$x_1+v_1=0,\dots,\quad x_p+v_p=0;$$

$\lambda^1,\dots,\lambda^p$ deviendront des fonctions linéaires de $x_1,\dots,x_p$, et l'on aura, en vertu de l'équation (29),

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=f(0,0,\dots,0,x_{p+1}+v'_{p+1},\dots,x_n+v'_n),$$

où $v'_{p+1},\dots,v'_n$ sont des fonctions linéaires de $x_1,\dots,x_p$. La forme ne dépendra plus que de $n-p$ variables; et comme il n'y a aucune relation entre les dérivées $f'_{x_{p+1}},\dots,f'_{x_n}$, il sera facile de reconnaître qu'on ne pourrait faire dépendre la forme d'un nombre moindre de variables.

En résumé, chacune des propriétés suivantes caractérise les formes de la $p^{\text{ième}}$ classe :

1° Tous les mineurs d'ordre $p-1$ de l'invariant sont nuls, mais non tous ceux d'ordre p.

2° Il y a p relations distinctes entre les dérivées de la forme.

3° La forme Φ_{p-1} est identiquement nulle, mais non la forme Φ_p.

4° La forme ne dépend que de $n-p$ fonctions linéaires des variables.

5° Il y a p systèmes de solutions linéairement indépendants des équations qu'on obtient en égalant à zéro les dérivées de la forme.

On peut établir d'autres propriétés en s'appuyant sur la transformation suivante, dont sont susceptibles les formes Φ_p.

Multiplions la fonction

$$\Phi_p = \begin{vmatrix} X^1 & \ldots & X^p \\ X^1 & \ldots & X^p \end{vmatrix},$$

deux fois successivement par le déterminant H,

$$H = \begin{vmatrix} x_1^1 & \ldots & x_1^p & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ x_n^1 & \ldots & x_n^p & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

du même nombre de lignes et où les quantités x_n^i sont quelconques. En posant

$$2\alpha_{ij} = x_1^i f'_{1j} + x_2^i f'_{2j} + \ldots + x_n^i f'_{nj},$$

$$U_j^i = X_1^i x_1^j + \ldots + X_n^i x_n^j,$$

nous trouvons

$$\Phi_p H^2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} & U_1^1 & \ldots & U_1^p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} & U_n^1 & \ldots & U_n^p \\ U_1^1 & \ldots & U_n^1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ U_1^p & \ldots & U_n^p & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Supposons que les p systèmes de variables $x_1^1, x_n^1, x_1^2, \ldots, x_n^2, x_1^p,$ x_n^p soient ceux qui annulent les dérivées, alors on aura

$$\alpha_{ij} = 0,$$

toutes les fois que l'un des indices i, j sera égal ou inférieur à p, et il

restera

$$(30)\qquad \Phi_p H^2 = (-1)^p \begin{vmatrix} U_1^1 & \cdots & U_1^p \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_p^1 & \cdots & U_p^p \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} \alpha_{p+1,p+1} & \cdots & \alpha_{p+1,n} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \alpha_{n,p+1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Ainsi, dans le cas des formes quadratiques de la $p^{ième}$ classe, la première fonction qui ne s'annule pas, Φ_p, devient le carré parfait d'un déterminant du $p^{ième}$ ordre.

Les éléments U_1^1, U_p^1 de ce déterminant étant égalés à zéro, les équations

$$U_1^1 = 0, \ldots, \quad U_p^1 = 0,$$

deviennent, quand on y remplace X_α^1 par f'_α, les p relations distinctes qui existent entre les dérivées.

Ajoutons, en terminant cet article, une curieuse remarque. La formule (13) de Gauss, relative à la forme adjointe, est susceptible de généralisation, et a son analogue pour chaque classe de formes quadratiques dans l'équation (23).

Mais on peut étendre cette équation à un autre point de vue, en considérant un cas qui se présente très-fréquemment, celui d'une forme quadratique de n variables, $x_1, \ldots, x_n$, entre lesquelles on établit p relations :

$$(31)\qquad \begin{cases} X_1^1 x_1 + \ldots + X_n^1 x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_1^p x_1 + \ldots + X_n^p x_n = 0. \end{cases}$$

On pourrait alors, en exprimant, au moyen de ces équations, p variables en fonction des autres, ramener la forme à ne dépendre que des $n-p$ autres; mais la symétrie serait détruite, et il vaudra mieux opérer comme il suit :

Dans la formule (22) la quantité désignée par U_i est

$$U_i = X_1^i x_1 + \ldots + X_n^i x_n.$$

Par conséquent, dans l'hypothèse où nous nous plaçons, en prenant pour les X_α^i les coefficients qui figurent dans les équations (31), U_1, U_p

sont identiquement nuls, et l'on a encore

$$R_{n-p} = f\Phi_p.$$

La formule (24) s'appliquera donc et donnera la décomposition de la forme en une somme de $n-p$ carrés. On aura ainsi évité l'élimination de p variables, ce qui, en Géométrie analytique particulièrement, peut offrir de grands avantages.

VI.

Les remarques précédentes vont nous permettre d'établir, en toute rigueur, un théorème relatif aux formes quadratiques, qui a reçu les applications les plus importantes, mais dont la démonstration n'a pas été, je crois, présentée jusqu'ici d'une manière complète.

Soit $f(x_1, \ldots, x_n)$ une forme quadratique dont les coefficients sont des fonctions réelles et continues de λ. Si, pour deux valeurs λ_0, λ_1 de λ, la forme n'a pas le même nombre de carrés positifs, si la différence entre le nombre des carrés positifs de la forme dans les deux cas est égale à k, je dis que l'équation en λ, qu'on obtient en égalant l'invariant de la forme à zéro, admet au moins k racines réelles égales ou inégales, comprises entre λ_0 et λ_1.

Pour démontrer cette proposition, formons la suite

$$\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$$

des fonctions Φ. Quelles que soient les valeurs des arbitraires contenues dans ces fonctions, pourvu qu'aucune des fonctions ne soit nulle, le nombre des variations de la suite indique le nombre des carrés de la forme. Pour les besoins de la démonstration, nous pourrons donc supposer qu'on change ces arbitraires toutes les fois que cela sera nécessaire, car le nombre des variations de la suite ne dépend aucunement de leurs valeurs particulières.

Supposons que λ varie de λ_0 à λ_1. Le nombre des variations de la suite ne pourra changer que si λ passe par des valeurs annulant soit des fonctions intermédiaires, soit la fonction Φ_0. Si, pour une va-

leur λ' de λ, une ou plusieurs fonctions intermédiaires s'annulent, je dis que le nombre des variations ne pourra changer. En effet, au lieu de considérer la suite précédente pour les valeurs de λ, voisines de λ', changeons les arbitraires X_i' de telle manière qu'aucune des fonctions ne s'annule plus pour $\lambda = \lambda'$, ce qui est toujours possible, puisque la première ne s'annule pas (art. IV). Alors on aura substitué à la suite précédente une nouvelle suite dont le nombre des variations indique aussi le nombre des carrés positifs de la forme, et dans cette nouvelle suite aucune fonction ne s'annulant pour $\lambda = \lambda'$, le nombre des variations ne changera pas quand λ passera de $\lambda' - \varepsilon$ à $\lambda' + \varepsilon$, ε étant suffisamment petit. Donc le nombre des carrés positifs de la forme et par conséquent le nombre de variations de la suite primitive ne peut changer, quand une ou plusieurs fonctions intermédiaires s'annulent pour une valeur de λ.

Supposons maintenant que, pour $\lambda = \lambda''$, Φ_0 s'annule, et que les fonctions $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{p-1}$ s'annulent en même temps, c'est-à-dire supposons que tous les mineurs d'ordre $p - 1$ de Φ_0 soient nuls, sans que tous ceux d'ordre p le soient, pour $\lambda = \lambda''$. Dans ces conditions, on pourra (art. IV) changer les arbitraires de telle manière, que $\Phi_p, \Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_n$ ne s'annulent pas pour $\lambda = \lambda''$, et, par conséquent, aussi pour toutes les valeurs de λ comprises entre $\lambda'' - \varepsilon$ et $\lambda'' + \varepsilon$, ε étant suffisamment petit. Alors, quand λ aura passé de $\lambda'' - \varepsilon$ à $\lambda'' + \varepsilon$, les seules fonctions

$$\Phi_0, \ldots, \Phi_{p-1}$$

se seront annulées, et, par conséquent, la nouvelle suite aura gagné ou perdu *au plus* p variations. Il en sera de même de la suite proposée, qui admet le même nombre de variations que la précédente pour les deux valeurs $\lambda'' - \varepsilon$, $\lambda'' + \varepsilon$.

Or il est facile de reconnaître que λ'' est une racine de l'équation $\Phi_0 = 0$ d'ordre au moins égal à p, car la dérivée $q^{\text{ième}}$ de Φ_0 par rapport à λ est évidemment une fonction linéaire des mineurs de Φ_0 d'ordres égaux ou inférieurs à q, et, par conséquent, elle s'annulera pour $\lambda = \lambda''$, tant que q sera inférieur à p, puisque tous les mineurs de Φ_0 sont nuls jusqu'à ceux de l'ordre $p - 1$ inclusivement. Ainsi λ'' est une racine de d'ordre de multiplicité au moins à p. Le nombre des va-

rations perdues ou gagnées par la suite des fonctions Φ est donc au plus égal à l'ordre de multiplicité de cette racine. Ainsi

Le nombre des carrés positifs de la forme ne peut changer que si λ passe par une racine de l'équation obtenue en égalant l'invariant à zéro, et dans ce cas le nombre des carrés positifs de la forme ne peut varier d'une quantité supérieure à l'ordre de multiplicité de la racine considérée.

C'est le théorème qu'il s'agissait d'établir; mais il donne lieu à une remarque essentielle : c'est que, dans son énoncé, on pourrait entendre par ordre de multiplicité d'une racine, non plus le nombre des dérivées, mais le nombre des fonctions $\Phi_n, \ldots, \Phi_1$ qu'annule cette racine, quels que soient les arbitraires figurant dans ces fonctions. Ainsi une racine multiple pourra être considérée comme simple si elle n'annule pas tous les mineurs du premier ordre; comme double si, annulant tous les mineurs du premier ordre, elle n'annule pas tous ceux du second et ainsi de suite.

Faisons quelques applications de ce théorème. Soit d'abord la forme quadratique

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2).$$

L'équation qu'on obtient en égalant l'invariant à zéro a été traitée d'abord par Cauchy, puis par une foule de géomètres : MM. Borchardt, Sylvester, etc. On déduit la réalité de ses racines du théorème que nous venons d'établir.

En effet, il est évident et il est d'ailleurs facile de reconnaître par les signes de la suite des fonctions Φ que, pour λ suffisamment grand, la forme précédente a le même nombre de carrés positifs que la suivante :

$$-\lambda(x_1^2 + \ldots + x_n^2).$$

Donc pour λ très-grand négatif il y aura n carrés positifs; pour λ infini positif il n'y aura plus de carré positif. Le nombre des carrés positifs varie donc de n à zéro quand λ varie de $-\infty$ à $+\infty$. L'équation en λ aura donc au moins n racines réelles, et comme elle est du degré n on voit qu'elle n'a pas de racine imaginaire. De plus, si elle a des racines multiples, une racine d'ordre p devra annuler tous les mineurs d'ordre $p-1$ de l'invariant. La méthode de M. Sylvester seule permet

de démontrer ce dernier point et d'écarter la difficulté relative aux racines multiples, qui se présente dans les méthodes de Cauchy et de M. Borchardt.

Considérons encore la forme

$$f(x_1,\dots,x_n) - \lambda\varphi(x_1,\dots,x_n) - \lambda^2\psi(x_1,\dots,x_n),$$

où nous supposons que les deux formes f et ψ soient définies positives, c'est-à-dire soient des sommes de n carrés positifs. En substituant $-\infty$, 0, $+\infty$, on trouve 0, n, 0 carrés positifs. L'équation de degré $2n$ qu'on obtient en égalant l'invariant à zéro aura donc $2n$ racines réelles, n positives et n négatives.

Soient

$$\varphi(x,y) = 0, \qquad \psi(x,y) = 0$$

deux équations algébriques en x, y que, pour plus de simplicité, nous supposerons du même degré en y et que nous écrirons

$$\varphi(y) = 0, \qquad f(y) = 0.$$

Des recherches de MM. Hermite et Cayley résulte la règle suivante pour former l'équation finale en x, résultat de l'élimination de y.

Formons le quotient

$$\frac{\varphi(y)f(y_1) - \varphi(y_1)f(y)}{y - y_1},$$

et après la division introduisons les puissances 0, y^0, y_1^0 dans les termes qui ne contiennent pas y ou y_1. Puis remplaçons $y^0, y^1, \dots, y^{n-1}$; $y_1^0, y_1^1, \dots, y_1^{n-1}$ par la même série de variables $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$. On obtiendra ainsi, à la place d'une fonction des deux indéterminées y, y_1, une forme quadratique des n variables $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$. Le déterminant de cette forme sera la résultante cherchée.

Or la forme quadratique ayant ses coefficients fonctions de x, si, en substituant deux nombres x_0, x_1 à la place de x on trouve une différence k entre le nombre des carrés positifs de la forme pour $x = x_0$ et pour $x = x_1$, on conclura que l'invariant de la forme, c'est-à-dire l'équation finale en x, a au moins k racines réelles comprises entre x_0 et x_1. Si en particulier on substitue $-\infty$, $+\infty$ à la place de x, on

pourra ainsi obtenir une limite inférieure du nombre des valeurs réelles de x.

Pour examiner quel est le nombre des carrés positifs de la forme lorsque x est très-grand, on pourra se borner en général à conserver les termes qui contiennent la plus haute puissance de x. C'est la règle que nous avons déjà suivie plus haut et qu'il est bien facile de justifier.

Soit en effet

$$f = x^m \mathrm{A} + x^{m-p}\mathrm{B} + \ldots$$

la forme quadratique ordonnée suivant les puissances de x; A, B sont des formes quadratiques, et nous supposerons, ce qui est suffisant pour le but que nous voulons atteindre, que A ait son déterminant de zéro et appartienne par conséquent à la classe des formes quadratiques fonctions de n variables distinctes. Posons $x = \frac{1}{x'}$, on aura

$$f = x'^{-m}(\mathrm{A} + \mathrm{B}x'^{p} + \ldots).$$

La forme $\mathrm{A} + \mathrm{A}x'^p + \ldots$ aura, pour x' suffisamment petit, le même nombre de carrés positifs que A, et par conséquent f aura pour x suffisamment grand le même nombre de carrés positifs que $\mathrm{A}x^m$, ce qu'il fallait démontrer.

Nous avons eu l'idée d'appliquer la méthode précédente à la démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations et de prouver par une méthode qui nous paraît tout à fait nouvelle que l'équation algébrique

$$f(x) = 0,$$

à coefficients réels ou imaginaires, admet une racine de la forme $a + b\sqrt{-1}$.

Et d'abord il est clair qu'il suffira de démontrer la proposition pour une équation à coefficients réels; car à toute équation de la forme

$$\mathrm{A} + \mathrm{B}\sqrt{-1} = 0$$

on peut substituer la suivante :

$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 = 0.$$

On peut d'ailleurs écarter les équations de degré impair. Il suffit donc de traiter le cas d'une équation à coefficients réels et de degré pair m.

A cet effet, remplaçons dans l'équation proposée x par $x(1+\sqrt{h})$ et $x(1-\sqrt{h})$. Il suffira de démontrer que les deux équations

$$f[x(1+\sqrt{h})]=0, \quad f[x(1-\sqrt{h})]=0$$

sont vérifiées par des valeurs réelles de x et de h, c'est-à-dire que l'équation finale en x que l'on obtient en éliminant h entre ces équations a des racines réelles. Nous ferons remarquer que x est la demi-somme de deux racines.

Donnons aux équations qui précèdent la forme suivante :

$$\varpi(h) = f(x+x\sqrt{h}) + f(x-x\sqrt{h}) = 0,$$

$$\psi(h) = \frac{\sqrt{h}}{h}\left[f(x+x\sqrt{h}) - f(x-x\sqrt{h})\right] = 0.$$

Il est facile de reconnaître que $\varpi(h)$, $\psi(h)$ sont des fonctions rationnelles de h d'ordre $\frac{m}{2}$ et que le résultat de l'élimination de h entre ces deux équations donnera l'équation aux demi-sommes des racines non débarrassée des racines de la proposée. Il suffira de démontrer que cette équation a des racines réelles. Formons suivant la règle indiquée le quotient

$$(\mathrm{M}) \qquad \frac{\varpi(h)\psi(h_1) - \psi(h)\varpi(h_1)}{h-h_1},$$

et après la division remplaçons les puissances de h, h_1 par de nouvelles variables, comme il a été indiqué. Les coefficients de la forme quadratique ainsi obtenus sont des fonctions de x du degré $2m-1$. Comme nous voulons reconnaître la variation du nombre de carrés positifs de cette forme, quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$, variation qui donne une limite inférieure du nombre des racines réelles, il suffira, d'après ce que nous avons vu, de chercher la forme quadratique qui forme le coefficient de x^{2m-1} dans le quotient précédent. Dans $\varpi(h)$, les termes de degré le plus élevé en x sont

$$x^m\left[(1+\sqrt{h})^m + (1-\sqrt{h})^m\right].$$

Dans $\psi(h)$, ils sont

$$x^{2m+1}\sqrt{h}\left[(1+\sqrt{h})^{m}-(1-\sqrt{h})^{m}\right];$$

c'est donc du quotient

$$(\mathrm{M}')\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{h-h_1}x^{2m+1}\left[(1+\sqrt{h})^{m}+(1-\sqrt{h})^{m}\right]\sqrt{h_1}\left[(1+\sqrt{h_1})^{m}-(1-\sqrt{h_1})^{m}\right]\\ +\frac{1}{h_1-h}x^{2m+1}\left[(1+\sqrt{h_1})^{m}+(1-\sqrt{h_1})^{m}\right]\sqrt{h}\left[(1+\sqrt{h})^{m}-(1-\sqrt{h})^{m}\right]\end{array}\right.$$

que proviendra le coefficient de x^{2m+1} dans l'expression (M). Remplaçant ensuite $h^0, h^1, h^2, \ldots h^{m-1}$ par $z_0, z_1, \ldots z_{m-1}$, on aura la forme quadratique A, qu'on peut substituer à la proposée pour les valeurs très-grandes de x. Cette forme quadratique a d'ailleurs son déterminant différent de zéro ; car les deux équations en h

$$(1+\sqrt{h})^{m}+(1-\sqrt{h})^{m}=0,$$
$$\sqrt{h}(1+\sqrt{h})^{m}-\sqrt{h}(1-\sqrt{h})^{m}=0,$$

au moyen desquelles elle est formée, n'ont aucune racine commune, et par conséquent le déterminant de la forme quadratique qu'on forme avec elles d'après la méthode exposée plus haut est différent de zéro.

Effectuons maintenant la division indiquée dans l'expression (M'); nous aurons, en groupant deux à deux les quatre termes du numérateur,

$$2x^{2m+1}\sum(1+\sqrt{h})^{m-p}(1-\sqrt{h_1})^{m-p}(1-\sqrt{h})^{p-1}(1+\sqrt{h_1})^{p-1},$$

$$-2x^{2m+1}\sum(1-\sqrt{h})^{m-p}(1+\sqrt{h_1})^{m-p}(1+\sqrt{h})^{p-1}(1-\sqrt{h_1})^{p-1},$$

et, en ajoutant et réunissant les termes,

$$-2x^{2m+1}\sum\left[(1+\sqrt{h})^{m-p}(1-\sqrt{h})^{p}-(1-\sqrt{h})^{m-p}(1+\sqrt{h})^{p}\right]$$
$$\times\left[(1+\sqrt{h_1})^{m-p}(1-\sqrt{h_1})^{p-1}-(1-\sqrt{h_1})^{m-p}(1+\sqrt{h_1})^{p-1}\right].$$

la somme étant étendue à toutes les valeurs de p depuis 1 jusqu'à $\frac{m}{2}$. Les expressions entre crochets sont des fonctions rationnelles semblables de h, h_1 d'ordre $\frac{m}{2}-1$ en h, h_1. Quand on remplacera les puissances par des indéterminées $z_0, \dots, z_{m-1}$, elles deviendront des linéaires de ces indéterminées, et l'on aura la forme quadratique

$$-2x^{m-1}\left[X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{\frac{m}{2}}^2\right].$$

Quand x variera de $-\infty$ à $+\infty$, on voit que le nombre des carrés positifs aura varié de $\frac{m}{2}$, donc l'équation aux demi-sommes des racines aura au moins $\frac{m}{2}$ racines réelles, ce qui démontre la proposition que nous avions en vue.

VIII.

Les fonctions Φ_p prennent des formes remarquables quand, à la place des arbitraires X_α^i, on met en évidence d'autres variables, en remplaçant une ou plusieurs séries de ces arbitraires par les expressions suivantes :

$$X_i^\alpha = \frac{1}{2}\frac{d}{dx_i} f(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Pour ne pas donner trop d'étendue à ce travail, nous examinerons seulement le cas où la substitution précédente est étendue à tous les systèmes de variables X_i^α.

Soit alors

$$(32)\qquad \begin{vmatrix} X^1 & \dots & X^r \\ Y^1 & \dots & Y^p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & X_1^1 & \dots & X_1^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & X_n^1 & \dots & X_n^r \\ Y_1^1 & \dots & Y_n^1 & 0 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & & \\ Y_1^p & \dots & Y_n^p & 0 & & 0 \end{vmatrix}$$

et posons

$$(33)\qquad X_i^r = \frac{1}{2}\frac{df}{dx_i^r} f(x_1^r \dots x_n^r), \quad Y_i^r = \frac{1}{2}\frac{d}{dy_i^r} f(y_1^r \dots y_n^r).$$

En retranchant des éléments de la $n+q^{\text{ième}}$ colonne ceux des n premières multipliés par $x_1^q, \dots, x_n^q$, et opérant de même pour les lignes, on trouvera sans difficulté

$$\left\{\begin{matrix} X^1 & \dots & X^p \\ Y^1 & \dots & Y^p \end{matrix}\right\} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -(x^1 y^1) & \dots & -(x^p y^1) \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ -(x^1 y^p) & \dots & -(x^p y^p) \end{vmatrix},$$

où l'on désigne par $(x^\alpha y^\beta)$ l'expression

$$(34)\qquad (x^\alpha y^\beta) = \frac{1}{2} x_1^\alpha \frac{df}{dy_1^\beta} + \frac{1}{2} x_2^\alpha \frac{df}{dy_2^\beta} + \dots + \frac{1}{2} x_n^\alpha \frac{df}{dy_n^\beta}.$$

On a évidemment

$$(35)\qquad (x^\alpha x^\alpha) = f(x_1^\alpha \dots x_n^\alpha).$$

D'après cela, si l'on adopte la notation nouvelle

$$(36)\qquad \begin{bmatrix} x^1 & \dots & x^p \\ y^1 & \dots & y^p \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} (x^1 y^1) & \dots & (x^p y^1) \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ (x^1 y^p) & \dots & (x^p y^p) \end{vmatrix},$$

on aura

$$(37)\qquad \left\{\begin{matrix} X^1 & \dots & X^p \\ Y^1 & \dots & Y^p \end{matrix}\right\} = (-1)^p \Phi_n \begin{bmatrix} x^1 & \dots & x^p \\ y^1 & \dots & y^p \end{bmatrix}.$$

Alors aux fonctions Φ_p définies plus haut correspondent des fonctions Ψ_p définies par la formule

$$(38)\qquad \Psi_p = \begin{bmatrix} x^1 & \dots & x^p \\ x^1 & \dots & x^p \end{bmatrix},$$

et l'on a

$$(39)\qquad \Phi_p = (-1)^p \Phi_0 \Psi_p ;$$

d'où il suit que le nombre des variations de la suite $\Phi_0, \ldots, \Phi_n$ est égal à celui des permanences de la suite

$$(40)\qquad 1, \quad \Psi_1, \ldots, \quad \Psi_n .$$

On peut aussi exprimer uniquement, au moyen des fonctions Ψ_p, la décomposition la plus générale d'une forme quadratique. Posons, en effet,

$$(41)\qquad \begin{cases} A_1 = \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \end{bmatrix}, \ldots, & A_p = \begin{bmatrix} x^0 & x^1 & \ldots & x^{p-1} \\ x^1 & x^2 & \ldots & x^p \end{bmatrix}, \\ \Psi_p = \begin{bmatrix} x^1 & \ldots & x^p \\ x_1 & \ldots & x^p \end{bmatrix}, & R_p = \begin{bmatrix} x^1 & . & x^p & x \\ x^1 & . & x^p & x \end{bmatrix}, \end{cases}$$

en considérant les x_i^α comme des arbitraires et le système $x(x_1, \ldots, x_n)$ comme contenant seul les variables. Alors A_p sera une fonction linéaire des variables, et l'on établira sans difficulté les équations suivantes :

$$(42)\qquad \frac{R_p}{\Psi_p} = \frac{A_1^2}{\Psi_0 \Psi_1} + \cdots + \frac{A_p^2}{\Psi_{p-1} \Psi_p}$$

et

$$(43)\qquad f = \frac{A_1^2}{\Psi_1} + \frac{A_2^2}{\Psi_1 \Psi_2} + \cdots + \frac{A_n^2}{\Psi_{n-1} \Psi_n} .$$

Cette décomposition en carrés n'est qu'une transformation de celle qui a été donnée à l'article III. La relation entre les fonctions Φ et Ψ est d'une grande importance en Géométrie analytique ; mais nous nous contenterons des indications qui précèdent, et nous passerons à l'examen d'une autre question, laissant même de côté pour le moment l'examen des décompositions qui correspondent à un système de fonctions Φ ou Ψ, lorsque quelques-unes de ces fonctions sont nulles pour certaines valeurs des arbitraires qu'elles renferment.

VIII.

Après avoir étudié une seule forme quadratique, examinons les questions relatives à deux formes considérées simultanément (*). On sait qu'en général deux formes quadratiques peuvent être transformées en deux sommes composées des mêmes carrés. Nous allons reprendre dans tous ses détails l'étude de cette importante question, et nous examinerons aussi les cas où cette décomposition cesse d'être possible.

Soient

$$f = \sum\sum a_{ij} x_i x_j, \quad \varphi = \sum\sum b_{ij} x_i x_j$$

les deux formes proposées. Posons

$$F = f - \lambda\varphi, \quad X_i = \frac{1}{2}\frac{dF}{dx_i} = \frac{1}{2}\frac{df}{dx_i} - \lambda\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx_i}.$$

(*) On pourra consulter pour l'étude de cette question les travaux suivants :

SYLVESTER. — *Enumeration of the contacts of lines and surfaces of the second order; on the relation between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions.* (*Phil. Magaz.*, p. 116, 295, 415; 1851.)

WEIERSTRASS. — *Ueber ein Theorem die homogenen Functionen d. 2ten grades betreffend, nebst Anwend. auf d. Theorie d. kleinen Schwingungen.* (*Comptes rendus de l'Académie de Berlin*, p. 207; 1858.)

WEIERSTRASS. — *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen.* (Même Recueil, p. 310; 1868.)

KRONECKER. — *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen.* (Même volume, p. 339.)

KRONECKER. — *Ueber Schaaren von quadratischen Formen.* (Même Recueil, janvier et mars, 1874.)

PAINVIN (L.). — *Discussion de l'intersection de deux surfaces du second ordre.* (*Nouvelles Annales*, 1868.)

CAMILLE JORDAN. — *Mémoire sur les formes bilinéaires.* (*Comptes rendus*, et p. 35 de ce volume.)

Les recherches que nous publions actuellement ont été présentées à la Société mathématique dans la séance du 11 mars 1874; elles avaient été, quelque temps auparavant, le 28 février, communiquées avec de grands détails à la Société Philomathique.

on aura identiquement, en vertu d'une formule déjà démontrée (p. 352),

$$(44)\qquad f+\lambda\varphi = F = -\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11} & \ldots & a_{1n}+\lambda b_{1n} & X_1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1}+\lambda b_{n1} & \ldots & a_{nn}+\lambda b_{nn} & X_n \\ X_1 & \ldots & X_n & 0 \end{vmatrix},$$

$\Delta(\lambda)$ désignant le déterminant de la forme F,

$$(45)\qquad \Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11} & \ldots & a_{1n}+\lambda b_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}+\lambda b_{n1} & \ldots & a_{nn}+\lambda b_{nn} \end{vmatrix}$$

du degré n en λ dans le cas général. Dans l'équation (44), considérons $X_1, \ldots, X_n$ comme des arbitraires particulières ; le second membre sera ainsi une fraction rationnelle de λ que nous pourrons décomposer en fractions simples. Soit λ_i une quelconque des racines supposées inégales de l'équation $\Delta(\lambda)=0$; nous aurons

$$(46)\qquad f+\lambda\varphi = -\sum\frac{1}{\Delta'(\lambda_i)(\lambda-\lambda_i)}\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda_i b_{11} & \ldots & a_{1n}+\lambda_i b_{1n} & X_1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1}+\lambda_i b_{n1} & \ldots & a_{nn}+\lambda_i b_{nn} & X_n \\ X_1 & \ldots & X_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Les déterminants qui figurent dans le second membre sont tous des carrés parfaits ; car ils sont égaux à la fonction adjointe dans laquelle on a remplacé par λ une racine λ_i de l'invariant, et l'on sait que, lorsque le déterminant d'une forme quadratique est nul, la fonction adjointe devient un carré parfait. On a donc

$$(47)\qquad f+\lambda\varphi = \sum\frac{U_i^2}{(\lambda-\lambda_i)\Delta'(\lambda_i)},$$

où les U_i sont de la forme

$$(47)'\qquad U_i = A_{i1}X_1+\ldots+A_{in}X_i,$$

$A_{i1}, \ldots, A_{in}$ étant des fonctions de λ_i.

Or, si dans l'équation (46), qui est une identité, on remplace maintenant les X_i par leurs expressions $\frac{1}{2}\left(\frac{df}{dx_i} + \lambda \frac{d\varphi}{dx_i}\right)$, on obtient une expression nouvelle des déterminants qui figurent dans le second membre. Si l'on multiplie les n premières lignes par $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qu'on les retranche de la dernière, et qu'on opère de même sur les colonnes, les déterminants conservent leur forme; mais X_i est remplacé par $(\lambda - \lambda_i)\frac{d\varphi}{2dx_i}$. Effectuons cette substitution dans la formule (47), on aura

$$U_i = (\lambda - \lambda_i)\left(A_{i1}\frac{d\varphi}{2dx_1} + \ldots + A_{in}\frac{d\varphi}{2dx_n}\right) = (\lambda - \lambda_i)V_i,$$

V_i ne contenant plus λ, et, par suite,

$$f + \lambda\varphi = \sum \frac{V_i^2(\lambda - \lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)},$$

ce qui donne, en égalant les coefficients de λ et les termes constants,

$$(48)\qquad f = -\sum \frac{V_i^2\lambda_i}{\Delta'(\lambda_i)}, \qquad \varphi = \sum \frac{V_i^2}{\Delta'(\lambda_i)}.$$

C'est la réduction des deux formes à des sommes composées des mêmes carrés.

Remarquons qu'en vertu de l'identité

$$\begin{vmatrix} X \\ X \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X \\ \alpha \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} X & \alpha \\ X & \alpha \end{vmatrix}\Delta$$

on a

$$U_i^2 = \begin{vmatrix} X \\ \alpha \end{vmatrix}^2 : \begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha \end{vmatrix},$$

ce qui donne une expression très-générale des fonctions U_i, et par suite des V_i.

La méthode précédente est en défaut dans plusieurs cas : 1° si le déterminant de φ est nul, le coefficient de λ^n dans $\Delta(\lambda)$ sera nul, et $\Delta(\lambda)$ ne sera pas du degré n. On peut toujours éviter cette difficulté

et d'autres analogues qui se présenteront dans la suite, en substituant aux formes f, φ des fonctions linéaires,

$$mf + n\varphi, \quad m'f + n'\varphi$$

de ces deux formes; 2° si l'équation $\Delta(\lambda) = 0$ a des racines multiples; 3° si elle est identiquement vérifiée, quel que soit λ. Nous allons étudier successivement ces cas exceptionnels.

IX.

Commençons par examiner le cas où l'équation en λ a des racines multiples. Reprenons l'équation

$$(19)\quad F(X_1,\ldots,X_n,\lambda) = f + \lambda\varphi = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11} & \ldots & a_{n1}+\lambda b_{n1} & X_1 \\ \ldots & & \ldots & \ldots \\ a_{1n}+\lambda b_{1n} & \ldots & a_{nn}+\lambda b_{nn} & X_n \\ X_1 & \ldots & X_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Soit $\lambda = \lambda_i$ une racine multiple : d'après un théorème dû à Lagrange, on sait que l'ensemble des fractions simples correspondant à la racine multiple λ_i sera le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement de

$$(A)\qquad \frac{F(X_1,\ldots,X_n,\lambda_i+h)}{\lambda-\lambda_i-h}$$

suivant les puissances de h. Or on a, d'après l'équation (17),

$$F(X_1,\ldots,X_n,\lambda_i+h) = \frac{A_1^2}{\Phi_1\Phi'_1} + \frac{A_2^2}{\Phi_2\Phi'_2} + \ldots + \frac{A_n^2}{\Phi_n\Phi'_n},$$

$A_1, A_2,\ldots, A_n$ étant des fonctions linéaires de $X_1,\ldots, X_n$ définies par les formules (15). En substituant cette expression de F dans (A) nous serons conduit à chercher le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement d'une suite de terme tels que

$$(B)\qquad \frac{A_p^2}{\Phi_p\Phi'_p}\cdot\frac{1}{\lambda-\lambda_i-h}$$

Supposons que le facteur $\lambda-\lambda_i$ entre au degré α_0 dans $\Phi_0=\Delta$, α_1 dans Φ_1, α_p dans $\Phi_p,\ldots$, je dis qu'on a nécessairement $\alpha_0>\alpha_1>\alpha_2\ldots$. En effet, si, *quelles que soient les arbitraires de* Φ_1, $\lambda-\lambda_i$ entre au degré α_1 dans Φ_1, tous les mineurs du premier ordre de Φ_0 contiendront en facteur $(\lambda-\lambda_i)^{\alpha_1}$, et la dérivée de Φ_0, qui est une fonction linéaire de ces mineurs, admettra $(\lambda-\lambda_i)^{\alpha_1}$ comme facteur; donc Φ_0 admettra $(\lambda-\lambda_i)$ avec un exposant α_0 supérieur à α_1. On démontrerait de même que α_1 est plus grand que α_2, etc. Posons

$$\alpha_0-\alpha_1=e_1,\ldots,\alpha_{h-1}-\alpha_h=e_h,\ldots.$$

Quand on remplacera $\lambda-\lambda_i$ par h, les fonctions Φ_p, Φ_{p-1}, qui dépendent linéairement des mineurs d'ordre $p, p-1$, contiendront en facteur h^{α_p} $h^{\alpha_{p-1}}$, et l'on pourra poser

$$\Phi_p=h^{\alpha_p}\Delta_p,\quad \Phi_{p-1}=h^{\alpha_{p-1}}\Delta_{p-1},$$

Δ_p, Δ_{p-1} étant des fonctions de h, de λ_i et des arbitraires qui figurent dans la décomposition en carrés. Ces fonctions Δ_p, Δ_{p-1} ne contiendront plus h en facteur, si l'on ne fait aucune hypothèse particulière sur ces arbitraires.

Quant à Δ_{n-p+1}, son expression développée est

$$\left|\begin{array}{cccccc}
a_{11}+(\lambda_i+h)\,b_{11} & \ldots & \ldots & X_1^1 & \ldots & X_1^p\\
\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a_{1n}+(\lambda_i+h)\,b_{1n} & \ldots & \ldots & X_n^1 & \ldots & X_n^p\\
X_1^1 & \ldots & X_n^1 & 0 & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
X_1^{p-1} & \ldots & X_n^{p-1} & 0 & \ldots & 0\\
X_1 & \ldots & X_n & 0 & \ldots & 0
\end{array}\right|.$$

Retranchons de la dernière ligne les n premières multipliées par x_1, $x_2,\ldots,x_n$, cette dernière sera remplacée par la suivante :

$$\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_i-h)\frac{d\varphi}{dx_1},\ldots,\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_i-h)\frac{d\varphi}{dx_n},\ U_1,\ldots,U_p,$$

car $X_i = \frac{1}{2}\lambda\frac{d\varphi}{dx_i} + \frac{d\psi}{dx_i}\cdots$; $U_1, U_2, \ldots, U_p$ désignent des fonctions linéaires des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En réunissant les termes qui contiennent $(\lambda - \lambda_i - h)$, on aura

$$A_{n-p+1} = B_{n-p+1}(\lambda - \lambda_i - h) + C_{n-p+1}.$$

C_{n-p+1} désigne l'ensemble des termes en $U_1, \ldots, U_p$. Il est facile de reconnaître que les coefficients de ces derniers termes sont des fonctions linéaires des mineurs d'ordre $p-1$ de Φ_0 : C_{n-p+1} contiendra donc en facteur $h^{\alpha_{p-1}}$. Posons

$$C_{n-p+1} = h^{\alpha_{p-1}} C_{n,p}.$$

Quant à B_{n-p+1}, c'est la fonction A_{n-p+1}, dans laquelle on a remplacé $X_1, \ldots, X_n$ par $\frac{1}{2}(\lambda - \lambda_i - h)\frac{d\varphi}{dx_1}\cdots$. On a donc

$$B_{n-p+1} = h^{\alpha_p}(\lambda - \lambda_i - h)B_{n,p},$$

$B_{n,p}$ étant une fonction linéaire des dérivées $\frac{d\varphi}{dx_1}, \ldots, \frac{d\varphi}{dx_n}$ qui contient en outre λ_i et h. Le terme (B) prend donc la forme

$$-\frac{[h^{\alpha_p}(\lambda - \lambda_i - h)B_{n,p} + h^{\alpha_{p-1}}C_{n,p}]^2}{(\lambda - \lambda_i - h)h^{\alpha_p + \alpha_{p-1}}\Delta_i\Delta_j}.$$

et dans son développement le seul terme

$$-\frac{(\lambda - \lambda_i - h)h^{2\alpha_p}B^2_{n,p}}{\Delta_i\Delta_j h^{\alpha_p+\alpha_{p-1}}}$$

peut donner des puissances négatives de h. Remplaçons $h^{\alpha_p - \alpha_{p-1}}$ par h^{-e_p}, nous aurons

$$(C) \qquad -\left[\frac{B_{n,p}}{\sqrt{\Delta_i\Delta_j}}\right]^2\frac{\lambda - \lambda_i - h}{h^{e_p}}.$$

Développons $\frac{B_{n,p}}{\sqrt{\Delta_i\Delta_j}}$ suivant les puissances ascendantes de h; $B_{n,p}$ contenant linéairement $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il en sera de même des coefficients

du développement et l'on aura

$$\frac{B}{\sqrt{\Delta_{\iota}\Delta_{\iota}}} = \xi_1 + \xi_2 h + \xi_3 h^2 + \ldots,$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 étant des fonctions linéaires de $x_1, \ldots, x_n$. Le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le terme (C) s'obtient ensuite sans difficulté; il est

$$(\lambda - \lambda_i)(\xi_1\xi_e + \xi_2\xi_{e-1} + \ldots + \xi_e\xi_1) + \xi_1\xi_{e-1} + \xi_2\xi_{e-2} + \ldots + \xi_{e-1}\xi_1.$$

En séparant le coefficient de λ et les termes constants, on aura

(49) $$\begin{cases} \varphi = \Sigma(\xi_1\xi_e + \ldots + \xi_e\xi_1), \\ f = \Sigma\lambda_i(\xi_1\xi_e + \ldots) \\ \quad + \Sigma(\xi_1\xi_{e-1} + \ldots + \xi_{e-1}\xi_1). \end{cases}$$

Ce sont les formules de M. Weierstrass.

On s'assurera aisément que le nombre total des fonctions linéaires ξ est égal à n; par conséquent, comme $f + \lambda\varphi$ dépend en général de n variables, il faut qu'aucune des fonctions linéaires ξ ne soit nulle et qu'elles soient linéairement indépendantes.

La réduction des formes f et φ, telle que nous l'avons donnée, conduit à la solution d'une des principales questions qui se présentent dans la théorie de deux formes quadratiques :

Étant données deux formes f, φ, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse les transformer par une même substitution linéaire en deux autres formes f', φ'?

Pour répondre à cette question, posons

$$F = f - \lambda\varphi, \quad F' = f' - \lambda\varphi'.$$

Les deux formes F, F' devront pouvoir se transformer l'une dans l'autre par une substitution linéaire dont les coefficients seront indépendants de λ. Or formons pour la fonction F la suite

$$\Phi_0, \ \Phi_1, \ldots, \ \Phi_n,$$

et écrivons aussi pour la forme F′ la suite analogue

$$\Phi'_0, \Phi'_1, \ldots, \Phi'_{n-1}.$$

D'après l'article II, si F′ est la transformée de F, les fonctions Φ′ seront égales aux fonctions Φ correspondantes, multipliées par une constante : le carré du déterminant de la substitution linéaire qui transforme F en F′.

Il suit de là que, si un facteur $\lambda - \lambda_i$ figure avec un certain exposant dans Φ_0, il doit figurer avec le même exposant dans Φ'_0 ; que si, en outre, il entre dans un certain nombre des fonctions Φ_1, Φ_2 qui suivent Φ_0, il doit figurer avec les mêmes exposants dans les fonctions correspondantes Φ'_1, Φ'_2. Tout cela se déduit immédiatement de ce que les fonctions Φ sont des contrevariants.

Les conditions précédentes sont donc nécessaires, mais de plus la réduction à des formes canoniques, que nous avons donnée après M. Weierstrass, montre qu'elles sont suffisantes, puisque cette forme canonique est entièrement déterminée quand on connaît les facteurs $\lambda - \lambda_i$, ainsi que les exposants avec lesquels ils figurent dans les fonctions Φ_1, Φ_2, ...

En terminant cet article, nous ajouterons un mot relatif à un cas exceptionnel que nous avons négligé. L'équation

$$\Delta(\lambda) = 0$$

est en général du degré n, mais il peut arriver dans quelques cas particuliers que son degré s'abaisse, c'est-à-dire que quelques-unes de ses racines deviennent infinies. Cela aura lieu toutes les fois que le déterminant de φ sera nul ; mais il suffira de substituer à φ $\varphi + mf$, m étant une constante convenablement choisie, et l'on reconnaîtra aisément qu'une racine infinie ne peut donner que des termes de la forme suivante :

$$x_1 x_n + x_2 x_{n-1} + \ldots + x_{n-1} x_2 + x_n x_1 \text{ dans } f$$

et

$$x_1 x_{n-1} + x_2 x_{n-2} + \ldots + x_{n-1} x_1 \text{ dans } \varphi.$$

En réunissant tous les résultats précédents, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Étant données deux formes f, φ telles que le déterminant de $f+\lambda\varphi$ ne soit pas identiquement nul, on peut toujours leur donner les formes suivantes :

$$f = A_1 + A_2 + \ldots + B_1 + B_2 + \ldots,$$
$$\varphi = A'_1 + A'_2 + \ldots + B'_1 + B'_2 + \ldots,$$

où les groupes tels que A, A′ *sont de la forme suivante :*

$$A = x_1 x_{p-1} + x_2 x_{p-2} + \ldots + x_{p-2} x_2 + x_{p-1} x_1$$
$$+ a(x_1 x_p + x_2 x_{p-1} + \ldots + x_{p-1} x_2 + x_p x_1),$$
$$A' = x_1 x_p + x_2 x_{p-1} + \ldots + x_{p-1} x_2 + x_p x_1,$$

et les groupes tels que (B, B′) *de la forme*

$$B = x_1 x_p + x_2 x_{p-1} + \ldots + x_{p-1} x_2 + x_p x_1,$$
$$B' = x_1 x_{p-1} + x_2 x_{p-2} + \ldots + x_{p-1} x_1.$$

Si pour plus de symétrie on a commencé par substituer aux fonctions f et φ des fonctions linéaires $mf + n\varphi$, $m'f + n'\varphi$, on aura la proposition suivante, plus générale et plus simple.

On peut décomposer les formes f, φ en groupes partiels A, A′, tels que l'on ait

$$A = aV + bV',$$
$$A' = a'V + b'V',$$

V et V′ étant des formes suivantes :

$$V = x_1 x_n + \ldots + x_n x_1,$$
$$V' = x_1 x_{n-1} + \ldots + x_{n-1} x_1.$$

X.

Considérons maintenant le cas où l'équation $\Delta(\lambda) = 0$ est identiquement satisfaite pour toutes les valeurs de λ. Alors le déterminant de la forme

$$F = f + \lambda\varphi,$$

égal à Φ_n ou $\Delta(\lambda)$, est identiquement nul. Il peut arriver aussi que les fonctions $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{p-1}$ relatives à cette forme soient nulles, quelles que soient les valeurs des arbitraires qui y entrent, ou, en d'autres termes, que tous les mineurs d'ordre $p-1$ du déterminant $\Delta(\lambda)$ soient nuls sans que tous ceux d'ordre p le soient. Nous adopterons cette hypothèse, qui comprend tous les cas possibles, et alors, d'après l'article V, la fonction F, pour une valeur quelconque de λ, ne dépendra que de $n-p$ fonctions linéaires des variables : il y aura p relations linéaires identiques entre ses dérivées. Représentons par $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ces dérivées, c'est-à-dire posons

$$(50)\qquad u_i = \frac{dF}{dx_i} = \frac{df}{dx_i} + \lambda\frac{d\varphi}{dx_i}.$$

Les relations linéaires entre les dérivées u_i peuvent être à coefficients constants, mais elles peuvent aussi dépendre de λ. En les ordonnant par rapport à cette variable λ, leur forme générale sera la suivante :

$$(51)\quad \left\{\begin{array}{l} A_1 = \lambda^{q_1}U_1^0 + \lambda^{q_1-1}U_1^1 + \lambda^{q_1-2}U_1^2 + \ldots + \lambda U_1^{q_1-1} + U_1^{q_1} = 0, \\ A_2 = \lambda^{q_2}U_2^0 + \lambda^{q_2-1}U_2^1 + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_p = \lambda^{q_p}U_p^0 + \ldots + U_p^{q_p} = 0, \end{array}\right.$$

les symboles U_i représentant des fonctions linéaires à coefficients constants de $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Si l'une des relations, la première par exemple, ne devait pas contenir λ, il suffirait de supposer $q_1 = 0$.

Les p relations entre les dérivées peuvent prendre des formes très-variées. Nous allons d'abord montrer que, si toutes les fonctions U qui y figurent ne sont pas linéairement indépendantes, on pourra toujours remplacer quelques-unes des relations par d'autres qui seront d'un degré moindre en λ.

A cet effet, nous commencerons par remarquer que, si l'on remplace les dérivées u_i par leurs expressions tirées des formules (50) en $x_1, \ldots, x_n, \lambda$, elles deviennent des fonctions linéaires de λ qui doivent satisfaire identiquement aux relations (51). On trouvera facilement que, pour

qu'il en soit ainsi, il faut que l'on ait

$$(52)\quad \begin{cases} U^0_\alpha = \mu^0_\alpha, \\ U^1_\alpha = \mu^1_\alpha + \lambda\mu^0_\alpha, \\ U^2_\alpha = \mu^2_\alpha + \lambda\mu^1_\alpha, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ U^{q_\alpha}_\alpha = \lambda\mu^{q_\alpha-1}_\alpha, \end{cases}$$

les quantités μ indépendantes de λ étant des fonctions linéaires à coefficients constants de $x_1, x_2, \dots, x_n$. On déduit des équations précédentes

$$(53)\quad \begin{cases} \mu^0_\alpha = U^0_\alpha, \\ \mu^1_\alpha = U^1_\alpha - \lambda U^0_\alpha, \\ \mu^2_\alpha = U^2_\alpha - \lambda U^1_\alpha + \lambda^2 U^0_\alpha, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \mu^{q_\alpha-1}_\alpha = U^{q_\alpha-1}_\alpha - \lambda U^{q_\alpha-2}_\alpha + \lambda^2 U^{q_\alpha-3}_\alpha - \dots \pm \lambda^{q_\alpha-1} U^0_\alpha. \end{cases}$$

Admettons maintenant que les fonctions U ne soient pas linéairement indépendantes, que quelques-unes d'entre elles figurant dans les relations

$$A_\gamma = 0, \quad A_{\gamma'} = 0, \quad A_{\gamma''} = 0, \dots$$

satisfassent, par exemple, à la relation identique

$$(54)\quad a^0_\alpha U^0_\alpha + a^1_\alpha U^1_\alpha + \dots + a^{q_\alpha}_\alpha U^{q_\alpha}_\alpha + a^0_\beta U^0_\beta + \dots + a^0_\gamma U^0_\gamma + \dots = 0,$$

où les coefficients a_α désignent des constantes quelconques. Remplaçons les fonctions U par leurs expressions tirées des formules (52) dans l'identité (54). Le coefficient de λ et le terme constant du premier membre devront être nuls séparément, ce qui donne les deux relations

$$(55)\quad \begin{cases} a^0_\alpha \mu^0_\alpha + a^1_\alpha \mu^1_\alpha + \dots + a^{q_\alpha-1}_\alpha \mu^{q_\alpha-1}_\alpha + a^0_\beta \mu^0_\beta + \dots = 0, \\ a^1_\alpha \mu^0_\alpha + \dots + a^{q_\alpha}_\alpha \mu^{q_\alpha-1}_\alpha + \dots = 0 \end{cases}$$

entre les fonctions μ. Si maintenant, opérant d'une manière inverse, nous remplaçons les μ par leurs expressions déduites des formules (54)

nous obtiendrons les deux équations

$$V = a^1_\alpha U^2_1 + a^1_\alpha U^1_1 + \lambda U^1_1 + a_\alpha U^1_1 + \lambda U^1_1 + \lambda^2 U^0_1 + \ldots$$
$$+ a^0 U^0_\alpha + \ldots = 0,$$
$$W = a^1_\alpha U^0_\alpha + a_\alpha U^1_\alpha + \lambda U^0_\alpha + \ldots + a^1_\alpha U^0_\alpha + \ldots = 0,$$

c'est-à-dire deux nouvelles relations identiques entre les dérivées de la forme F. Il est facile d'ailleurs de reconnaître que l'on a identiquement

$$(56) \qquad \lambda V - W = a_\alpha A_\alpha + a^0_\beta A_\beta + \ldots = 0.$$

Il suit de là qu'on pourra retrancher du système des relations entre les dérivées une quelconque des relations $A_\alpha = 0$, $A_\beta = 0$, à la condition d'ajouter les deux nouvelles

$$V = 0, \quad W = 0.$$

Or, si A_α est la relation de degré le plus élevé en λ, V, W, d'après leur composition même, seront de degré inférieur à A_α : on aura donc remplacé une des relations du système par deux autres de degré moindre

$$V = 0, \quad W = 0.$$

On gardera à la place de A_α l'une de ces deux relations ou une combinaison des deux; l'autre sera une conséquence du nouveau système ainsi formé. Il restera donc un système de p relations entre les dérivées, dont l'une sera nouvelle et d'un degré inférieur à celui de la relation qu'elle remplacera [*].

En continuant de cette manière, on arrivera nécessairement à un système réduit de relations entre les dérivées jouissant de la propriété que toutes les fonctions U qui y figurent soient devenues linéairement indépendantes. Admettons donc, dès à présent, que les formules (51) satisfont à cette première condition.

---

[*] Ce raisonnement ne pourrait se faire si le coefficient $a^{q_\alpha}_\alpha$ était nul, mais on verra que cette circonstance ne pourra plus se présenter si aux deux formes f, φ on substitue des fonctions linéaires de ces formes $mf + n\varphi$, $m'f + n'\varphi$.

Puisque les fonctions U sont toutes indépendantes, il faut que leur nombre total soit inférieur au nombre n des variables. On a donc l'inégalité

$$q_1 + 1 + \ldots + q_p + 1 \leq n,$$
$$p + q_1 + q_2 + \ldots + q_p \leq n.$$

En second lieu, et pour la même raison, nous pouvons affirmer qu'on pourra effectuer sur $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une substitution linéaire au déterminant différent de zéro, et qui réduira chacune des fonctions U à un seul terme, par exemple U_1^0 à u_1, U_1^1 à u_2, ... En effectuant une telle substitution, les relations entre les dérivées prendront une forme extrêmement simple et comprise dans le type suivant :

$$(57)\qquad \lambda^q F'_1 + \lambda^{q-1} F'_2 + \lambda^{q-2} F'_3 + \ldots + F'_{q+1} = 0.$$

Or une telle équation exprime que F, considérée comme fonction des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{q+1}$, ne dépend que des combinaisons suivantes :

$$z_1 = x_1 - \lambda x_2, \quad z_2 = x_2 - \lambda x_3, \ldots, \quad z_q = x_q - \lambda x_{q+1}.$$

Si donc on exprime $x_1, x_2, \ldots, x_q$ en fonction de $z_1, z_2, \ldots, z_q$, x_{q+1}, F deviendra une fonction *entière* de λ et des z, mais ne contiendra plus x_{q+1}.

En répétant le même raisonnement pour chacune des relations entre les dérivées, toutes semblables à l'équation (57), mais de degrés différents en général, on voit qu'après avoir effectué sur nos variables la substitution qui ramène les relations entre les dérivées à ces formes simples, il y aura $p+1$ groupes de variables : 1° les p premiers groupes correspondant aux diverses relations entre les dérivées

$$x_1^1, \quad x_2^1, \ldots, \quad x_{q_1}^1, \quad x_{q_1+1}^1,$$
$$x_1^2, \quad x_2^2, \ldots, \quad x_{q_2}^2, \quad x_{q_2+1}^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1^p, \ldots, \quad x_{q_p}^p, \quad x_{q_p+1}^p;$$

2° h autres variables

$$\xi_1, \quad \xi_2, \ldots, \quad \xi_h,$$

en nombre tel que l'on ait

$$h + p + q_1 + q_2 + \ldots + q_p = n.$$

D'après ce que nous avons reconnu en examinant l'équation (57) et ses conséquences relatives à la forme de F, si l'on pose

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} z'_1 &= x'_1 + \lambda x'_2,\\ z'_2 &= x'_2 + \lambda x'_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ z'_{q_1} &= x'_{q_1} + \lambda x'_{q_1+1}, \end{aligned}\right.$$

la forme F deviendra une fonction entière de λ et des variables

$$z'_1,\quad z'_2,\ldots,\quad z''_1,\quad z''_2,\ldots,\quad z^{(p)}_1,\ldots,\quad \xi_1,\quad \xi_2,\ldots,\quad \xi_h,$$

en nombre égal à $n - p$.

Une conséquence nouvelle peut se déduire de ce que F, sous sa première forme, quand on l'exprime en fonction des x et des ξ, ne contient λ qu'au premier degré. Il suit en effet de là que F ne peut contenir les carrés et les produits des variables z; car si, pour revenir à l'expression première de F, on remplace les z par leurs expressions tirées des formules (58), on verra sans peine que dans ces produits et ces carrés les termes de degré le plus élevé en λ ne pourraient se réduire les uns avec les autres. Il faudra donc que les variables z entrent au premier degré seulement dans F, qui sera de la forme

$$(59)\quad F = \sum (y'_1 z'_1 + y'_2 z'_2 + \ldots + y'_{q_1} z'_{q_1}) + \varpi(\xi_1,\ldots,\xi_h) + \lambda\varpi'(\xi_1,\ldots,\xi_h),$$

les variables y étant des fonctions linéaires de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_h$ et le nombre total des variables z et ξ étant $n - p$, ce qui est bien d'accord avec cette propriété que les formes $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_{p-1}$, relatives à la forme F, sont identiquement nulles [*].

Comme la forme F ne peut dépendre d'un nombre de variables

[*] On peut encore etablir ce point de la manière suivante : considérons dans la forme F les termes qui contiennent seulement $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{q_1}$, c'est-à-dire qui renferment les carrés et les produits de ces variables. L'ensemble de ces termes doit satisfaire à

moindre que $n - p$, il suit de là qu'il ne peut y avoir aucune relation linéaire identique entre les fonctions y. Par exemple, si l'on avait $y'_2 = a y'_1$, l'ensemble des termes

$$y'_1 z'_1 + y'_2 z'_2$$

serait remplacé par $y'_1(z'_1 + a z'_2)$, et F, au lieu de dépendre effectivement de z'_1, z'_2, ne varierait qu'avec la somme $z'_1 + a z'_2$: F deviendrait donc fonction de moins de $n - p$ variables, ce qui est impossible. Le raisonnement qui précède, bien que fait sur un exemple simple, est tout à fait général.

Pour éviter des notations compliquées dans ce qui va suivre, nous supposerons que les séries en nombre égal à p,

$$y'_1 z'_1 + \ldots + y'_p z'_p,$$

qui figurent dans F, se réduisent à une seule [*]. Alors

$$F = y_1 z_1 + y_2 z_2 + \ldots + y_k z_k + \varpi(\xi_1, \ldots, \xi_h) + \lambda \varpi'(\xi_1, \ldots, \xi_h),$$

l'équation (57), ce qu'on reconnaîtra aisément être impossible, si ces termes ne disparaissent pas tous de F.

En second lieu, soit

$$\lambda x' F'_{x'_1} + \lambda x'' F'_{x''} + \ldots = 0$$

une nouvelle relation entre les dérivées, jointe à l'équation (57). Les termes de F, qui contiennent les produits des variables x par les variables x', doivent satisfaire à la fois à l'équation précédente et à l'équation (57), ce qui ne peut avoir lieu que si leurs coefficients sont tous nuls. Cette double remarque justifie la forme de F, adoptée dans le texte.

[*] On peut encore justifier cette simplification par la remarque suivante, qui pourra être utile dans d'autres occasions. Plusieurs séries peuvent toujours se déduire d'une seule, en supposant que quelques-unes des variables y deviennent nulles ; par exemple, la suite simple

$$y_1(x_1 + \lambda x_2) + y_2(x_2 + \lambda x_3) + y_3(x_3 + \lambda x_4) + y_4(x_4 + \lambda x_5) + y_5(x_5 + \lambda x_6)$$

se décompose, si l'on égale y_3 à zéro, dans les deux suivantes :

$$y_1(x_1 + \lambda x_2) + y_2(x_2 + \lambda x_3),$$
$$y_4(x_4 + \lambda x_5) + y_5(x_5 + \lambda x_6).$$

Ainsi l'on peut toujours supposer que les suites Σyz que nous considérons se

ou

$$(60)\quad \begin{cases} F = y_1(x_1 + \lambda x_2) + y_2(x_2 + \lambda x_3) + \ldots \\ \qquad + y_k(x_k + \lambda x_{k+1}) + \varpi + \lambda\varpi', \end{cases}$$

ce qui donnera

$$(61)\quad \begin{cases} f = x_1 y_1 + \ldots + x_k y_k + \varpi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu), \\ \varphi = x_2 y_1 + \ldots + x_{k+1} y_k + \varpi'(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu). \end{cases}$$

Les fonctions y étant indépendantes, nous pouvons exprimer quelques-unes des variables ξ en fonction des y, et écrire

$$f = x_1 y_1 + \ldots + x_k y_k + \varpi_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu, y_1, y_2, \ldots, y_k),$$
$$\varphi = x_2 y_1 + \ldots + x_{k+1} y_k + \varpi'_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu, y_1, y_2, \ldots, y_k).$$

Décomposons les fonctions ϖ_1, ϖ'_1 en trois groupes de termes : 1° les termes contenant les variables y ; 2° les termes contenant les variables ξ ; 3° les termes contenant les produits des variables y par les variables ξ.

On aura

$$(62)\quad \begin{cases} \varpi_1 = \Psi(y_1, y_2, \ldots, y_k) + y_1 H_1 + \ldots + y_k H_k + \psi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu), \\ \varpi'_1 = \Psi'(y_1, y_2, \ldots, y_k) + y_1 H'_1 + \ldots + y_k H'_k + \psi'(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu), \end{cases}$$

H_i, H'_i désignant des fonctions linéaires des variables ξ, et l'on aura

$$F = y_1 z_1 + \ldots + y_k z_k + \Psi + \lambda\Psi' + y_1(H_1 + \lambda H'_1) + \ldots + \psi + \lambda\psi'.$$

Il est à remarquer que le nombre total des variables dont dépend F est égal à $n - 1$, puisqu'ici $p = 1$. On a donc

$$2k + \nu = n - 1 ;$$

---

déduisent d'une seule dans laquelle quelques-unes des variables y sont ensuite égalées à zéro. Toutes les fois qu'il s'agira uniquement de démontrer que certaines identifications sont possibles, ce qui est le cas actuel, on pourra donc, avec un grand avantage pour la simplicité des notations, réduire les séries à une seule ; car si l'identification est possible, quelles que soient les valeurs des variables y, elle le sera *a fortiori*, quand quelques-unes de ces variables seront égalées à zéro.

mais, F dépendant en général de $n - 1$ variables, il faut qu'en la considérant comme fonction des variables y, z, ξ son déterminant soit en général différent de zéro. Or ce déterminant se réduit, comme il est facile de le voir, à celui de la fonction

$$\psi(\xi_1, \ldots, \xi_\alpha) + \lambda\psi'(\xi_1, \ldots, \xi_\alpha),$$

considérée comme fonction des seules variables $\xi_1, \ldots, \xi_\alpha$. Ce dernier déterminant n'est donc pas nul, quel que soit λ, et nous pourrons tout à l'heure appliquer aux deux fonctions ψ, ψ' la méthode de l'article IX.

Cela posé, faisons une troisième substitution et remplaçons $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\alpha$ par $\xi_1 + \upsilon_1, \ldots, \xi_\alpha + \upsilon_\alpha$, $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_\alpha$ étant des fonctions linéaires à déterminer des variables y. Après cette substitution, les termes qui contiennent les produits des variables y et ξ dans F deviendront

$$\begin{aligned} &y_1(H_1 + \lambda H'_1) + y_2(H_2 + \lambda H'_2) + \ldots \\ &+ \upsilon_1\left(\frac{d\psi}{d\xi_1} + \lambda\frac{d\psi'}{d\xi_1}\right) + \upsilon_2\left(\frac{d\psi}{d\xi_2} + \lambda\frac{d\psi'}{d\xi_2}\right) + \ldots. \end{aligned}$$

Un calcul facile [*] prouve qu'on peut donner à l'ensemble de ces

[*] Soient en effet

$$\begin{aligned} \upsilon_1 &= a_{11}y_1 + \ldots + a_{1k}y_k, \\ \upsilon_2 &= a_{21}y_1 + \ldots + a_{2k}y_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \upsilon_\alpha &= a_{\alpha 1}y_1 + \ldots + a_{\alpha k}y_k, \end{aligned}$$

les expressions des fonctions υ où les coefficients a sont inconnus. En exprimant la condition énoncée dans le texte, on aura des équations telles que la suivante :

$$H'_i + a_{1i}\frac{d\psi'}{d\xi_1} + a_{2i}\frac{d\psi'}{d\xi_2} + \ldots + a_{\alpha i}\frac{d\psi'}{d\xi_\alpha} = H_{i+1} + a_{1,i+1}\frac{d\psi}{d\xi_1} + \ldots + a_{\alpha,i+1}\frac{d\psi}{d\xi_\alpha}.$$

Si l'on égale dans les deux membres les coefficients des variables ξ, on a un système d'équations qui font connaître $a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{\alpha i}$ en fonction de $a_{1,i+1}, \ldots, a_{\alpha,i+1}$, et dont le déterminant est le même que celui de la fonction ψ' qu'on peut toujours supposer différent de zéro. Donc, étant pris arbitrairement $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{\alpha k}$, on déterminera $a_{1,k-1}, \ldots, a_{\alpha,k-1}$, puis $a_{1,k-2}, a_{2,k-2}, \ldots, a_{\alpha,k-2}$, etc.

termes, en disposant des arbitraires contenues dans les fonctions v, la forme

$$y_1(P_1 + \lambda P_2) + y_2(P_2 + \lambda P_3) + \ldots + y_k(P_k + \lambda P_{k+1}).$$

On verra de même que le nouveau terme $\Psi + \lambda\Psi'$ peut toujours recevoir la forme [*]

$$y_1(Q_1 + \lambda Q_2) + y_2(Q_2 + \lambda Q_3) + \ldots + y_k(Q_k + \lambda Q_{k+1}).$$

En tenant compte de ces résultats, F s'écrira sous la forme

$$\begin{aligned} F = {} & y_1[x_1 + P_1 + Q_1 + \lambda(x_2 + P_2 + Q_2)] \\ & + y_2[x_2 + P_2 + Q_2 + \lambda(x_3 + P_3 + Q_3)] + \ldots + \psi + \lambda\psi'. \end{aligned}$$

Remplaçant enfin $x_i + P_i + Q_i$ par x_i, nous aurons la forme définitive

$$F = y_1(x_1 + \lambda x_2) + \ldots + y_k(x_k + \lambda x_{k+1}) + \psi + \lambda\psi',$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} f &= x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ky_k + \psi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\alpha), \\ \varphi &= x_2y_1 + x_3y_2 + \ldots + x_{k+1}y_k + \psi'(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\alpha). \end{aligned}$$

En opérant sur plusieurs séries, nous eussions trouvé de même

$$(63) \qquad \begin{cases} f = \sum (x'_1y'_1 + \ldots + x'_ky'_k) + \psi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\alpha), \\ \varphi = \sum (x'_2y'_1 + \ldots + x'_{k+1}y'_k) + \psi'(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\alpha), \end{cases}$$

comme forme définitive de f et de φ. Les deux fonctions ψ et ψ' étant telles, que le déterminant de $\psi + \lambda\psi'$ soit différent de zéro, donneront des termes de la forme de ceux trouvés à l'article IX, ce qui conduit au résultat général suivant.

[*] Il suffit de prendre pour inconnues les constantes figurant dans les fonctions P. Les équations du premier degré, auxquelles on est conduit, se résolvent sans aucune difficulté.

Étant données deux formes quadratiques f et φ, on peut toujours décomposer la forme $f - \lambda\varphi$ en plusieurs groupes ayant l'une des trois formes suivantes :

$$1^\circ \qquad y_1(x_1 - \lambda x_2) + y_2(x_2 - \lambda x_3) + \ldots + y_n(x_n - \lambda y_1) \ [\text{illegible}];$$

$$2^\circ \qquad (\lambda_i - \lambda)(x_1 x_n + x_2 x_{n-1} + \ldots + x_n x_1)$$
$$+ (x_1 x_{n-1} + x_2 x_{n-2} + \ldots + x_{n-1} x_n);$$

$$3^\circ \qquad x_1 x_n + \ldots + x_n x_1 + \lambda(x_1 x_{n-1} + \ldots + x_{n-1} x_1).$$

Ce résultat concorde avec ceux qui ont été trouvés par MM. Weierstrass et Kronecker; mais, après l'avoir établi, il reste à indiquer d'une manière précise sous quelles conditions, étant données deux formes f, φ, elles peuvent être transformées en deux autres formes f', φ'. Voici quelles sont les conditions qui résultent de notre théorie des formes $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$. Formons

$$F = f - \lambda\varphi, \quad F' = f' - \lambda\varphi'.$$

Il faut :

1° Que, pour F et F′, le même nombre de formes Φ_p soient identiquement nulles;

2° Que, pour les formes F et F′, les relations entre les dérivées des formes soient des mêmes degrés par rapport à λ;

3° Il peut arriver que, Φ_p étant la première des fonctions qui ne s'annulent pas identiquement, l'équation en λ,

$$\Phi_p = 0,$$

admette des racines λ_i indépendantes des arbitraires qui entrent dans Φ_p. Supposons alors que $\lambda - \lambda_i$ figure à la puissance α_p dans Φ_p, α_{p+1} dans $\Phi_{p+1}, \ldots, \alpha_{p+k}$ dans Φ_{p+k}. Il faudra que le même facteur entre avec les mêmes exposants dans les formes $\Phi'_p, \Phi'_{p+1}, \ldots$, relatives à F′.

Démontrons que ces conditions sont nécessaires et suffisantes.

La première est évidente et ne donne lieu à aucune difficulté.

Quant à la seconde, pour la rendre plus précise, nous avons à étudier ce que nous avons appelé les *systèmes réduits de relations* entre les dérivées et à indiquer quelques-unes de leurs propriétés communes.

Supposons qu'on ait obtenu un premier système réduit de relations entre les dérivées

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \ldots, \quad A_p = 0,$$

où l'on a

$$A_q = U_q^0 \lambda^{\alpha_q} + U_q^1 \lambda^{\alpha_q - 1} + \ldots.$$

D'après la définition que nous avons donnée d'un tel système, il ne peut y avoir aucune relation linéaire entre les fonctions U. Je dis qu'il résulte de là qu'on ne pourra obtenir de nouvelle relation entre les dérivées *sous forme entière* qu'en multipliant $A_1, A_2, \ldots, A_p$ par des polynômes *entiers en* λ, et en égalant à zéro la somme des résultats ainsi obtenus.

Supposons en effet qu'on multiplie $A_1, A_2, \ldots, A_p$ par des fonctions de λ, $L_1, L_2, \ldots, L_p$, on aura entre les dérivées l'équation

$$A_1 L_1 + A_2 L_2 + \ldots + A_p L_p = 0,$$

si $L_1, L_2, \ldots, L_p$ sont fractionnaires, soit $\lambda = h$ une valeur de λ qui rend infinie une ou plusieurs des fonctions L. En décomposant le premier membre de l'équation précédente en fractions simples, on aura un terme en $\frac{1}{\lambda - h}$ dont le numérateur sera une fonction linéaire des polynômes U, et, par conséquent, ne pourra être nul, puisqu'il n'y a aucune relation linéaire entre les variables U.

Il suit de là que, étant donné un système réduit de relations entre les dérivées, pour avoir toutes les relations entre les dérivées entières par rapport à λ, il suffira de multiplier les équations de ce premier système par des polynômes en λ. Supposons que, en opérant de cette manière, on ait substitué au système primitif de relations le suivant :

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \ldots, \; B_p = 0,$$

où l'on a

$$B_q = V_q^0 \lambda^{\beta_q} + V_q^1 \lambda^{\beta_q - 1} + \ldots$$

Les fonctions V seront évidemment des fonctions linéaires des anciennes fonctions U. Si donc elles sont en plus grand nombre que les fonctions U, le nouveau système ne sera pas réduit. Or le nombre de fonctions V est égal à la somme des degrés en λ des équations

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \ldots, \; B_p = 0,$$

augmentée de p. Il faut donc, pour que le nouveau système soit *réduit*,

que la somme des degrés des équations nouvelles soit la même que pour le système primitif. De là résulte la règle suivante, pour passer d'un système réduit particulier au système le plus général :

Étant données les relations

$$\Delta_1 = 0, \quad \ldots, \quad \Delta_s = 0,$$

on ajoutera à chacune d'elles toutes celles du même degré multipliées par des constantes arbitraires, toutes celles de degré inférieur d'une unité, multipliées par des polynômes du premier degré en λ, et, en général, toutes celles de degré inférieur de k unités multipliées par des polynômes de degré k. On formera ainsi le système réduit le plus général de relations entre les dérivées.

Il résulte de cette règle que, dans deux systèmes réduits de relations entre les dérivées, il y a de part et d'autre le même nombre de relations du même degré en λ.

Alors notre seconde condition peut s'énoncer ainsi :

Pour les deux formes F, F′, *les relations réduites entre les dérivées doivent être en même nombre et des mêmes degrés.*

Quant à la troisième condition, elle est évidemment nécessaire : cela résulte de ce que les formes Φ sont des contrevariants; mais, comme elle achève de déterminer la forme canonique, nous voyons que, jointe aux précédentes, elle suffit à assurer l'équivalence des deux formes F, F′.

Il est donc démontré que nos trois conditions sont à la fois nécessaires et suffisantes.

Comme première application, nous traiterons les deux formes

$$f = (a_1 x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots [illegible]$$
$$\varphi = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Posons

$$x_1 = x'_1,$$
$$x_2 = a x'_1 + x'_2,$$
$$x_3 = a^2 x'_1 + 2a x'_2 + x'_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{k+1} = a^k x'_1 + k a x'_k + \frac{k(k-1)}{2} a^2 x'_{k-1} + \ldots,$$

Soit aussi

$$\begin{aligned} y_1 &= a y_2 + a^2 y_3 + \ldots = y'_1, \\ y_2 &= 2 a y_3 + \ldots = y'_2, \\ y_3 &= 3 a y_4 \ldots = y'_3; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

on trouvera

$$\begin{aligned} f &= x_1 y_1 + \ldots = x'_1 y'_1 + \ldots, \\ \varphi &= x_1 y_1 + \ldots = x' y'_1 \ldots \end{aligned}$$

Soient enfin deux formes quaternaires qui, égalées à zéro, représentent deux surfaces du second degré, nous obtiendrons les formes canoniques suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} a x_1^2 + b x_2^2 + c x_3^2 + d x_4^2, \\ a' x_1^2 + b' x_2^2 + c' x_3^2 + d' x_4^2; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_3^2 + d x_4^2, \\ a' x_1^2 + b' x_1 x_2 + c' x_3^2 + d' x_4^2; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a x_2^2 + b x_1 x_2 + c x_3^2 + d x_3 x_4, \\ a' x_2^2 + b x_1 x_2 + c x_3^2 + d' x_3 x_4; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} a(2 x_1 x_3 + x_2^2) + b x_1 x_2 + c x_4^2, \\ a'(2 x_1 x_3 + x_2^2) + b x_1 x_2 + c' x_4^2; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a(x_1 x_4 + x_2 x_3) + b(2 x_1 x_3 + x_2^2), \\ a'(x_1 x_4 + x_3 x_3) + b'(2 x_1 x_3 + x_2^2); \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} a x_1 x_2 + b x_4^2, \\ a' x_1 x_3 + b' x_4^2, \end{array}\right.$$

que nous avons réduites au moindre nombre, en supposant que les coefficients $a, b, a', b', \ldots$ puissent devenir nuls ou égaux. Ces résultats sont d'accord avec ceux de M. Painvin, dans le travail déjà cité p. 385.

Mémoire sur la réduction et la transformation des systèmes quadratiques;

PAR M. CAMILLE JORDAN.

Dans le paragraphe I de ce Mémoire, nous donnons une méthode pour réduire à une forme canonique un système de deux fonctions quadratiques.

Nous montrons ensuite (§ II) que, pour que deux semblables systèmes soient équivalents, il faut et il suffit que leurs réduites soient identiques.

Il reste à déterminer, dans le cas de l'équivalence, toutes les substitutions qui transforment ces systèmes l'un dans l'autre. L'une d'elles est fournie immédiatement par le procédé même de la réduction. Pour obtenir les autres, il suffit de déterminer toutes les substitutions qui transforment l'un des systèmes en lui-même.

Nous résolvons ce problème dans le paragraphe III, en montrant que toutes ces substitutions résultent de la combinaison de certaines substitutions simples, que nous déterminons *a priori*.

I. — *Réduction des systèmes quadratiques.*

1. Soit P une fonction quadratique de $m+n$ variables $x_1, \ldots, x_m$; $y_1, \ldots, y_n$; on aura évidemment

$$P = Q_x + B_{xy} + Q_y,$$

Q_x étant quadratique par rapport aux x, Q_y quadratique par rapport aux y, et B_{xy} bilinéaire par rapport aux x et aux y.

Cela posé, nous pouvons établir les deux propositions suivantes :

2. Lemme I. — *Si Q se réduit à zéro, on pourra, par une substitution convenable, où les y seront remplacés par des fonctions des y seulement, mettre P sous la forme*

$$(1) \qquad x_1 y_1 + \dots + x_k y_k + Q_1,$$

Q_1 étant une fonction quadratique de $y_{k+1}, \dots, y_n$ seulement.

Soit en effet

$$B_{xy} = x_1 Y_1 + \dots + x_m Y_m,$$

$Y_1, \dots, Y_m$ étant des fonctions linéaires des y. Admettons que $Y_1, \dots, Y_k$ soient des fonctions indépendantes, mais qu'on ait au contraire pour $j > k$

$$Y_j = a_{1j} Y_1 + \dots + a_{kj} Y_k.$$

On aura

$$B_{xy} = (x_1 + a_{k+1,1} x_{k+1} + \dots + a_{m1} x_m) Y_1 + \dots + (x_k + a_{k+1,k} x_{k+1} + \dots + a_{mk} x_m) Y_k.$$

Soient $Y_{k+1}, \dots, Y_n$ des fonctions quelconques des y, qui jointes à $Y_1, \dots, Y_k$ forment un système de n fonctions indépendantes. Effectuons sur les y la substitution

$$Y_1, \dots, Y_k, Y_{k+1}, \dots, Y_n \mid y_1, \dots, y_n;$$

P prendra la forme

$$(x_1 + a_{k+1,1} x_{k+1} + \dots) y_1 + \dots + (x_k + a_{k+1,k} x_{k+1} + \dots) y_k + Q'_1,$$

où Q'_1 est une fonction quadratique des y, que l'on peut mettre sous la forme

$$y_1 f_1 + \dots + y_k f_k + Q_1,$$

Q_1 ne dépendant plus que de $y_{k+1}, \dots, y_n$.

Effectuons maintenant la substitution

$$(2) \qquad \left| \begin{array}{ll} x_1 & x_1 - a_{k+1,1} x_{k+1} - \dots - f_1 \\ \dots & \dots \\ x_k & x_k - a_{k+1,k} x_{k+1} - \dots - f_k \end{array} \right|;$$

P se trouvera réduit à (1).

3. Lemme II. — *Si, Q_x n'étant pas identiquement nul, son déterminant Δ diffère de zéro, on pourra faire disparaître les termes bilinéaires B_x par une substitution de la forme*

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m & x_m + a_{m1}y_1 + \ldots + a_{mn}y_n \end{vmatrix},$$

où les coefficients a seront entièrement déterminés.

Soit en effet

$$B_x = y_1\varphi_1 + \ldots + y_n\varphi_n,$$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ étant des fonctions linéaires des x. Effectuons la substitution (3) : P prendra la forme

$$Q_x + B'_{xy} + Q'_y,$$

la portion bilinéaire B'_{xy} étant égale à

$$\left(a_{11}\frac{\partial Q_x}{\partial x_1} + \ldots + a_{m1}\frac{\partial Q_x}{\partial x_m} + \varphi_1\right)y_1 + \ldots + \left(a_{1n}\frac{\partial Q_x}{\partial x_1} + \ldots + a_{mn}\frac{\partial Q_x}{\partial x_m} + \varphi_n\right)y_n.$$

Elle s'annulera identiquement si l'on a

$$(4)\qquad \begin{cases} a_{11}\dfrac{\partial Q_x}{\partial x_1} + \ldots + a_{m1}\dfrac{\partial Q_x}{\partial x_m} + \varphi_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\dfrac{\partial Q_x}{\partial x_1} + \ldots + a_{mn}\dfrac{\partial Q_x}{\partial x_m} + \varphi_n = 0. \end{cases}$$

Si dans la première de ces équations on égale séparément à zéro les coefficients de $x_1, \ldots, x_m$, on aura entre les coefficients $a_{11}, \ldots, a_{m1}$ un système de m équations linéaires ayant Δ pour déterminant ; on pourra donc les calculer sans difficulté. Les équations suivantes détermineront de même $a_{12}, \ldots, a_{m2}, \ldots ; a_{1n}, \ldots, a_{mn}$.

4. Corollaire. — *Toute fonction quadratique peut être ramenée à la*

forme suivante :

$$A_1 x_1^2 + \ldots + A_\lambda x_\lambda^2 + B_1 x_{\lambda+1} x_{\lambda+2} + \ldots + B_\mu x_{\lambda+2\mu-1} x_{\lambda+2\mu},$$

où chaque variable ne figure que dans un seul terme.

Considérons en effet la fonction de p variables $P = f(x_1, \ldots, x_p)$. Si elle contient un terme en x_1^2, par exemple, tel que $A_1 x_1^2$, on pourra (lemme II) la ramener à la forme $A_1 x_1^2 + Q$, où Q ne dépend plus de x_1. Si elle ne contient que des rectangles, soit Bx_1x_2 l'un d'eux. On pourra (lemme I) la réduire à la forme $Bx_1x_2 + Q$, où Q ne dépend plus de x_1, x_2. Dans l'un et l'autre cas, on n'aura plus qu'à réduire Q (s'il n'est pas nul) par la répétition du même procédé.

5. *Remarque I.* — On peut réduire P à une somme de carrés (en introduisant des imaginaires); car $A_1 x_1^2$ se change en x_1^2 par la substitution

$$\left| x_1 \quad \frac{x_1}{\sqrt{A}} \right|,$$

et Bx_1x_2 se réduit à $x_1^2 + x_2^2$ par la substitution

$$\left| x_1, x_2 \quad \frac{x_1 + ix_2}{\sqrt{B}}, \; x_1 - ix_2 \right|.$$

6. *Remarque II.* — Soit

$$| X_1, \ldots, X_p \quad x_1, \ldots, x_p |$$

une substitution qui ramène P à une somme de carrés, telle que $x_1^2 + \ldots + x_q^2$. Revenant aux variables primitives, on aura évidemment

$$P = X_1^2 + \ldots + X_q^2;$$

si $q < p$, on voit par là que P ne dépend en réalité que des q variables $X_1, \ldots, X_q$; mais son déterminant par rapport à ces variables sera égal à l'unité.

Soient d'ailleurs $\xi_1, \ldots, \xi_q$ des fonctions linéaires quelconques de $X_1, \ldots, X_q$; remplaçant $X_1, \ldots, X_q$ par leurs valeurs en fonction de $\xi_1, \ldots, \xi_q$, on aura P exprimé en fonction des q variables ξ, et son déter-

minant par rapport à ces variables, étant égal, comme on sait, au carré du déterminant des équations qui lient les X aux ξ, sera $\gtrless$ o.

On peut donc choisir les variables indépendantes de telle sorte que P ne contienne dans son expression que celles dont il dépend en réalité; et cela fait, son déterminant par rapport à ces variables sera $\gtrless$ o.

7. Théorème. *Deux fonctions quadratiques quelconques P, P' peuvent être ramenées simultanément à la forme suivante :*

(6) $\quad P = \mathcal{A}_x^{\alpha} + \mathcal{A}_y^{\beta} + \ldots + \mathcal{B}_z^{\gamma} + \mathcal{B}_u^{\delta} + \ldots + \mathcal{C}_v^{\epsilon} + \ldots + \mathcal{C}_w^{\zeta} + \ldots,$

(7) $\quad P' = \mathcal{B}_x^{\alpha} + \mathcal{B}_y^{\beta}$ [illegible] $\lambda_1 \mathcal{C}$ [illegible] $\ldots,$

les $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ étant des expressions de la forme

$$\mathcal{A}^{\alpha}_x = \sum_1 x_{2} \ldots x_{2\rho}, \quad \mathcal{B} = \sum_1 \ldots, \quad \mathcal{C} = \sum_1 z \ldots$$ [illegible]

et $\lambda_1, \ldots$ des constantes $\gtrless$ o.

Ce théorème est évident pour les fonctions d'une seule variable, et nous allons établir que, s'il est vrai jusqu'à $r-1$ variables, il le sera pour r variables.

8. Supposons d'abord que l'une au moins des deux fonctions données P et P' ait son déterminant nul; nous avons vu (**6**) qu'on peut mettre ces fonctions sous la forme

$$P = F(\xi_1, \ldots, \xi_q), \quad P' = F'(\xi'_1, \ldots, \xi'_{q'}),$$

les ξ et les ξ' étant des fonctions linéaires des variables, choisies de telle sorte que le déterminant de P par rapport aux ξ, et celui de P' par rapport aux ξ', soient $\gtrless$ o.

Admettons, pour plus de généralité, que le faisceau des fonctions linéaires $c_1\xi_1 + \ldots + c_q\xi_q$ formées avec $\xi_1, \ldots, \xi_q$ ait des fonctions communes avec le faisceau $c'_1\xi'_1 + \ldots + c'_{q'}\xi'_{q'}$ formé des fonctions linéaires des ξ'. Ces fonctions communes pourront s'exprimer linéairement par un certain nombre d'entre elles $f_1, \ldots, f_g$, qui seront indépendantes.

Prenons maintenant pour variables : 1° les fonctions $f_1, \dots, f_\mu$; 2° des fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_{q-\mu}$ de $\xi_1, \dots, \xi_q$, formant avec les f un système de q fonctions indépendantes; 3° des fonctions $\varphi'_1, \dots, \varphi'_{q'-\mu}$ de $\xi'_1, \dots, \xi'_{q'}$, formant avec les f un système de q' fonctions indépendantes; il viendra

$$P = F(\varphi_1, \dots, \varphi_{q-\mu}, f_1, \dots, f_\mu), \quad P' = F'(\varphi'_1, \dots, \varphi'_{q'-\mu}, f_1, \dots, f_\mu).$$

Cela posé, divers cas seront à distinguer.

9. Si $q = q' = \mu$, le système P, P′ ne dépendra que des variables $f_1, \dots, f_\mu$; mais le nombre de ces variables est $< r$; car l'une au moins des deux fonctions P, P′, par exemple P, ayant son déterminant nul, le nombre q des variables distinctes dont elle dépend est moindre que r. Donc le théorème sera vrai par hypothèse.

10. Supposons, au contraire, qu'une au moins des deux quantités $q - \mu$, $q' - \mu$ soit > 0. On aura

$$P = Q_\varphi + B_{\varphi f} + Q_f, \quad P' = Q'_{\varphi'} + B'_{\varphi' f} + Q'_f,$$

Q_φ désignant une fonction quadratique par rapport aux φ, $B_{\varphi f}$ une fonction bilinéaire par rapport aux φ et aux f, etc.

Si Q_φ n'est pas identiquement nul, on pourra le réduire à une somme de carrés $v_1^2 + w_1^2 + \dots$, puis faire disparaître dans l'expression $B_{\varphi f} + Q_f$ les termes qui contiennent $v_1, w_1, \dots$ (lemme II). Il viendra alors

$$P = v_1^2 + w_1^2 + \dots + P_1 = \mathfrak{C}_v^0 + \mathfrak{C}_w^0 + \dots + P_1,$$

P_1 et P′ ne contenant plus les variables $v_1, w_1, \dots$.

On a d'ailleurs

$$\mathfrak{B}_v^0 = 0, \quad \mathfrak{B}_w^0 = 0, \dots,$$

d'où

$$P' = \mathfrak{B}_v^0 + \mathfrak{B}_w^0 + \dots + P';$$

et l'on voit que, pour ramener P et P′ aux formes (6) et (7), il suffira d'y ramener P_1 et P′, où le nombre des variables est diminué.

Si $Q_{\varphi'}$ n'est pas identiquement nul, on raisonnera de même.

11. Supposons donc $Q_\varphi = 0$, $Q'_{\varphi'} = 0$. On aura

$$P = B_{\varphi f} + Q_f = \varphi_1 F_1 + \ldots + \varphi_{q-\mu} F_{q-\mu} + Q_f,$$
$$P' = B'_{\varphi' f} + Q'_f = \varphi'_1 F'_1 + \ldots + \varphi'_{q'-\mu} F'_{q'-\mu} + Q'_f,$$

$F_1, \ldots, F'_{q'-\mu}$ étant des fonctions linéaires des f.

Le déterminant de P par rapport aux quantités f et φ étant [illegible], ces fonctions $F_1, \ldots, F_{q-\mu}$ seront indépendantes les unes des autres. Il en est de même des fonctions $F'_1, \ldots, F'_{q'-\mu}$; mais il pourra se faire que les deux faisceaux

$$c_1 F_1 + \ldots + c_{q-\mu} F_{q-\mu} \quad \text{et} \quad c'_1 F'_1 + \ldots + c'_{q'-\mu} F'_{q'-\mu}$$

aient des fonctions communes. Dans ce cas, que nous traiterons en premier lieu, ces fonctions communes pourront s'exprimer linéairement au moyen d'un certain nombre ν d'entre elles, $x_2, y_2, \ldots$.

Cela posé, prenons pour variables au lieu des f : 1° les fonctions $x_2, y_2, \ldots$; 2° d'autres fonctions linéaires des F, telles que U,..., formant avec $x_2, y_2, \ldots$ un système de $q - \mu$ fonctions indépendantes; 3° d'autres fonctions des F′, telles que U′,..., formant avec x_2, y_2 un système de $q' - \mu$ fonctions indépendantes; 4° d'autres fonctions des f, telles que V,..., formant avec les précédentes un système de μ fonctions indépendantes. Il viendra

$$B_{\varphi f} = \psi_1 x_2 + \psi_2 y_2 + \ldots + \psi_{\nu+1} U + \ldots,$$
$$B'_{\varphi' f} = \psi'_1 x_2 + \psi'_2 y_2 + \ldots + \psi'_{\nu+1} U' + \ldots,$$

$\psi_1, \psi_2, \ldots$ étant des fonctions linéaires des φ, indépendantes entre elles (sans quoi le nombre des variables distinctes dont P dépend serait moindre qu'on ne l'a supposé) et $\psi'_1, \psi'_2, \ldots$ des fonctions des φ', indépendantes entre elles.

D'autre part Q_f et Q'_f pourront se mettre sous la forme

$$Q_f = x_2 L_1 + y_2 L_2 + \ldots + Q,$$
$$Q'_f = x_2 L'_1 + y_2 L'_2 + \ldots + Q',$$

où Q, Q′ ne contiennent plus $x_2, y_2, \ldots$.

Prenons maintenant pour variables, au lieu des φ, les suivantes :

$$x = \psi_1 + Y_1, \quad y = \psi_2 + Y_2, \quad \ldots, \quad \psi_\rho, \ \ldots,$$
$$x' = \psi'_1 + Y'_1, \quad y' = \psi'_2 + Y'_2, \quad \ldots, \quad \psi'_\rho, \ \ldots;$$

il viendra

$$P = x_1 x_2 + y_1 y_2 + \ldots + Q, \qquad Q = Y' + Y'_1 + \ldots + Q_1,$$
$$P' = x_2 x_1 + y_2 y_1 + \ldots + Q', \qquad Q' = \mathfrak{P}' + \mathfrak{P}'_1 + \ldots + Q'_1,$$

et il ne restera plus qu'à réduire Q et Q′, qui ne contiennent plus les variables x, y, . .

12. Passons au cas où les fonctions F et F′ sont toutes indépendantes. En prenant pour variables, au lieu des f, les fonctions F, F′, et d'autres fonctions linéaires V_1, V_2,... des f, qui forment avec les F, F′ un système de μ fonctions indépendantes, on pourra écrire

$$(8) \qquad \begin{cases} P = \varphi_1 F_1 + \ldots + \varphi_q F_q + O_F + Q_{F'} + B_{F'V} + Q_V, \\ P' = \varphi'_1 F_1 + \ldots + \varphi'_q F_q + O'_F + Q'_{F'} + B'_{F'V} + Q'_V, \end{cases}$$

où O_F est une fonction quadratique des variables F, F′, V, dont tous les termes contiennent en facteur une des variables F; $Q_{F'}$ une fonction quadratique des F′; $B_{F'V}$ une fonction bilinéaire par rapport aux F′ et aux V, etc.

Cela posé, profitons de l'indétermination qui existe dans le choix des variables V pour ramener les deux fonctions Q_V, Q'_V à des formes réduites analogues à (6) et (7). Les nouvelles variables seront en général de trois sortes :

1° Des variables $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ qui figurent dans Q_V et non dans Q'_V;

2° Des variables $v'_1, v'_2, \ldots, v'_{\nu'}$ qui figurent dans Q'_V et non dans Q_V;

3° Des variables $w_1, w_2, \ldots$ qui figurent à la fois dans les deux fonctions.

D'après la forme des expressions réduites (6) et (7), on voit que le déterminant de Q_V par rapport aux variables v et w dont il dépend sera $\gtrless 0$; de même pour le déterminant de Q'_V par rapport aux v' et aux w.

Cela posé, il sera aisé d'achever la réduction de P, P′ en simplifiant les expressions (8).

En effet, en accroissant les variables v, w de multiples des variables F', on pourra les faire disparaître (lemme II) de l'expression B_{FV}, laquelle se réduira à une fonction B_1 bilinéaire par rapport aux F' et aux v'. Puis on réduira de même B_1 à une fonction B_1 bilinéaire par rapport aux F et aux v.

Cela fait, B'_{Fv} sera de la forme $u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots$, $u_1, u_2, \dots$ étant des fonctions linéaires des F ; et ces fonctions seront indépendantes, car ce sont les dérivées de P' par rapport à $v_1, v_2, \dots$ et l'on sait que le déterminant de P par rapport aux variables qui y figurent n'est pas nul. Soient $t_1, \dots, t_{q-2\mu}$ d'autres fonctions des F formant avec les u un système de $q-\mu$ fonctions indépendantes; on prendra les u et les t pour variables à la place des F. Q'_F deviendra une fonction quadratique des u et des t; on en fera disparaître les u (lemme I) en accroissant les v de multiples convenables des u et des t; puis en modifiant, s'il y a lieu, le choix des t, on ramènera Q'_F à une somme de carrés, telle que $t_1^2 + \dots + t_\alpha^2$. On modifiera de même le choix des variables F' et V' de telle sorte que B_{1} se réduise à la forme $u'_1 v'_1 + \dots + u'_{\mu'} v'_{\mu'}$ et Q_1 à la forme $t_1'^2 + \dots + t_{\alpha'}'^2$.

Cela posé, $\varphi_1 F_1 + \dots + \varphi_{q-\mu} F_\mu$ prendra la forme

$$y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_\mu u_\mu + Z_1 t_1 + \dots + Z_{q-2\mu} t_{q-2\mu},$$

où les y, Z sont des fonctions linéaires de $\varphi_1, \dots, \varphi_{q-\mu}$. Ces fonctions seront distinctes; sans quoi l'on pourrait réduire le nombre des variables indépendantes qui figurent dans P; d'autre part O_F prendra la forme

$$O_F = L_1 u_1 + L_2 u_2 + \dots + M_1 t_1 + \dots,$$

où les L, M sont des fonctions linéaires des variables t, u, v, v', w.

Prenons maintenant pour variables, au lieu de $\varphi_1, \dots, \varphi_{q-\mu}$, les suivantes : $y_1, y_2, \dots, z_1 = Z_1 + L_1, \dots$; P se trouvera ramené à la forme

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} P = {} & y_1 u_1 + \dots + y_\mu u_\mu + z_1 t_1 + \dots + z_{q-2\mu} t_{q-2\mu} + t_1^2 + \dots + t_\alpha^2 \\ & + u'_1 v'_1 + \dots + u'_{\mu'} v'_{\mu'} + Q_V. \end{aligned} \right.$$

De même, en modifiant convenablement les variables φ', on mettra P'

sous la forme

$$(10)\quad \begin{cases} P' = y'_1 u'_1 + \ldots + y'_\mu u'_\mu + z'_1 t'_1 + \ldots + z'_{\rho} t'_{\rho} + \ldots + t_1^2 + \ldots + t_{\alpha}^2 \\ \qquad + u_1 v_1 + \ldots + u_\nu v_\nu + Q'_\nu. \end{cases}$$

D'ailleurs P' doit dépendre de toutes les variables, à l'exception de $q - \alpha$ d'entre elles; et comme il ne contient ni les $y_1, \ldots, y_\mu$, ni les $z_1, \ldots, z_{\rho-\mu-\nu}$, il devra contenir tous les t. On aura donc $\alpha = q - \mu - \nu$, et de même $\alpha' = q' - \mu - \nu'$.

Cela posé, substituons pour Q_ν et Q'_ν leurs expressions réduites; on voit immédiatement, en groupant convenablement les termes, que les expressions (9) et (10) ne se distingueront plus de celles des formes (6) et (7) que par la notation.

15. Il reste à traiter le cas où P et P' ont leur déterminant différent de zéro.

Considérons dans ce cas la forme $P' + \lambda P$, où λ est un coefficient arbitraire. En nous imposant la condition que $P' + \lambda P$ ait zéro pour déterminant, nous obtiendrons une équation du degré r en λ dont le premier terme a pour coefficient le déterminant de P. On pourra donc toujours y satisfaire.

Le coefficient λ ayant été ainsi choisi, on pourra ramener les fonctions P et $P' + \lambda P$ à leur forme réduite du genre indiqué au théorème. D'ailleurs P dépendant de toutes les variables ne pourra contenir dans son expression de termes des espèces $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. On aura donc simplement

$$P = \mathcal{C}_\nu^\varepsilon + \ldots + \mathcal{C}_w^\zeta + \ldots,$$

$$P' + \lambda P = \mathcal{B}_\nu^\varepsilon + \ldots + \mathcal{B}_w^\zeta + \lambda_1 \mathcal{C}_w^\zeta + \ldots;$$

d'où

$$P' = \mathcal{B}_\nu^\varepsilon - \lambda \mathcal{C}_\nu^\varepsilon + \ldots + \mathcal{B}_w^\zeta - (\lambda_1 + \lambda)\mathcal{C}_w^\zeta + \ldots,$$

ce qui achève de prouver le théorème.

II. — *Équivalence des systèmes.*

14. Deux systèmes de deux formes P et P′, Q et Q′ sont *équivalents*, s'ils peuvent être transformés l'un dans l'autre par une substitution convenable.

Théorème. — *Deux systèmes réduits*

$$(11)\quad \begin{cases} P = \mathcal{A}_x^\alpha + \dots + \mathcal{B}_z^\gamma + \dots + \mathcal{C}_v^\varepsilon + \dots + \mathcal{C}_w^\zeta + \dots, \\ P' = \mathcal{B}_x^\alpha + \dots + \mathcal{C}_z^\gamma + \dots + \mathcal{B}_v^\varepsilon + \dots + \mathcal{B}_w^\zeta - \lambda_1 \mathcal{C}_w^\zeta + \dots \end{cases}$$

et

$$(12)\quad \begin{cases} Q = \mathcal{A}_{x'}^{\alpha'} + \dots + \mathcal{B}_{z'}^{\gamma'} + \dots + \mathcal{C}_{v'}^{\varepsilon'} + \dots + \mathcal{C}_{w'}^{\zeta'} + \dots, \\ Q' = \mathcal{B}_{x'}^{\alpha'} + \dots + \mathcal{C}_{z'}^{\gamma'} + \dots + \mathcal{B}_{v'}^{\varepsilon'} + \dots + \mathcal{B}_{w'}^{\zeta'} - \lambda'_1 \mathcal{C}_{w'}^{\zeta'} + \dots \end{cases}$$

ne peuvent être équivalents si l'on n'a pas à la fois

$$\alpha = \alpha', \dots, \quad \gamma = \gamma', \dots, \quad \varepsilon = \varepsilon', \quad \lambda_1 = \lambda'_1, \dots$$

Nous supposerons le théorème démontré pour les systèmes contenant moins de variables que les proposés (il est évident pour une seule variable).

15. Si dans la substitution S, qui, par hypothèse, transforme Q, Q′ en P, P′, on met en évidence les termes qui contiennent les premiers indices des suites telles que x et v, on pourra écrire

$$(13)\qquad S = \left| \begin{array}{llll} \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots \\ x' & a_\rho x_1 + \dots & + a' v_1 + \dots & + X_\rho \\ z' & b_\rho x_1 + \dots & + b' v_1 + \dots & + Z_\rho \\ v' & c_\rho x_1 + \dots & + c' v_1 + \dots & + V_\rho \\ w' & d_\rho x_1 + \dots & + d' v_1 + \dots & + W_\rho \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots \end{array} \right|,$$

X_ρ, Z_ρ, V_ρ, W_ρ,… étant des fonctions des variables $x_2, \dots$, $z_1, \dots$, $v_2, \dots$, $w_1, \dots$, qui figurent seules dans l'expression de P′.

D'ailleurs tous ceux des coefficients a, b, c, d,…, a', b', c', d',…,

qui figurent dans les expressions qui succèdent à $x'_2, \dots, z'_1, \dots, v'_2, \dots, w'_1, \dots$, seront égaux à zéro.

On a en effet

$$Q' = F(x'_2, \dots, z'_1, \dots, v'_2, \dots, w'_1, \dots),$$

F étant une fonction quadratique dont le déterminant n'est pas nul; et si l'on pose pour abréger

$$\Pi = F(X_2, \dots, Z_1, \dots, V_2, \dots, W_1, \dots)$$

la substitution S transformera Q' en

$$(14)\quad \begin{cases} \Pi + x_1\left(a_2\dfrac{\partial\Pi}{\partial X_2} + \dots + b_1\dfrac{\partial\Pi}{\partial Z_1} + \dots + c_2\dfrac{\partial\Pi}{\partial V_2} + \dots + d_1\dfrac{\partial\Pi}{\partial W_1} + \dots\right) + \dots \\ + v_1\left(a'_2\dfrac{\partial\Pi}{\partial X_2} + \dots + b'_1\dfrac{\partial\Pi}{\partial Z_1} + \dots + c'_2\dfrac{\partial\Pi}{\partial V_2} + \dots + d'_1\dfrac{\partial\Pi}{\partial W_1} + \dots\right) + \dots + R, \end{cases}$$

où R est quadratique en $x_1, \dots, v_1, \dots$.

Cette transformée n'étant autre que P', les termes en $x_1, \dots, v_1, \dots$ devront disparaître, et la transformée se réduira à Π. D'ailleurs cette transformée doit dépendre du même nombre de variables distinctes que Q'. Donc $X_2, \dots, Z_1, \dots, V_2, \dots, W_1, \dots$, seront des fonctions indépendantes. Il en sera de même des fonctions $\frac{\partial\Pi}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial\Pi}{\partial Z_1}, \dots, \frac{\partial\Pi}{\partial V_2}, \dots, \frac{\partial\Pi}{\partial W_1}, \dots$, puisque le déterminant de F n'est pas nul. Donc les coefficients de $x_1, \dots, v_1, \dots$, dans l'expression (14), ne pourront s'annuler que si tous les coefficients $a_2, \dots, b_1, \dots$ s'annulent.

16. Soit maintenant, pour abréger,

$$A = a_1 x_1 + \dots + a'_1 v_1 + \dots, \quad C = c_1 x_1 + \dots + c'_1 v_1 + \dots, \quad \dots$$

Le déterminant de S, qui n'est pas nul, est divisible par celui des fonctions A, C,.... Donc ces fonctions sont indépendantes.

Cela posé, opérons la substitution S sur la fonction Q. Les termes en $x_1, \dots, v_1, \dots$, contenus dans le résultat, seront les suivants :

$$(15)\qquad AX_1 + \dots + CV_2 + \dots$$

La transformée se confondant avec P, ces termes doivent se réduire à $x_1 x_2 + \ldots + v_1 v_2 + \ldots$. On en conclut que $X_2, \ldots, V_2, \ldots$ ne dépendent que de $x_2, \ldots, v_2, \ldots$. Soient, en effet, t une autre variable quelconque, $m, \ldots, n, \ldots$ les coefficients qui la multiplient respectivement dans les expressions $X_2, \ldots, V_2, \ldots$. Le coefficient de t dans l'expression (15) sera $(\mathrm{A}m + \ldots + \mathrm{C}n + \ldots)$, et ne pourra s'annuler identiquement que si $m = 0, \ldots, n = 0, \ldots$, puisque A,..., C,... sont des fonctions indépendantes.

17. Cela posé, soient $[\mathrm{P}], [\mathrm{P}'], [\mathrm{X}_3], \ldots, [\mathrm{Z}_1], \ldots, [\mathrm{V}_3], \ldots, [\mathrm{W}_1], \ldots$ ce que deviennent les fonctions $\mathrm{P}, \mathrm{P}', \ldots, \mathrm{X}_3, \ldots, \mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{V}_3, \ldots, \mathrm{W}_1, \ldots$, en y posant $x_2 = 0, \ldots, v_2 = 0, \ldots$, $[\mathrm{Q}]$ et $[\mathrm{Q}']$ ce que deviennent Q et Q′ pour $x'_2 = 0, \ldots, v'_2 = 0, \ldots$. Pour que la substitution S transforme Q et Q′ en P et P′, il faudra évidemment que la substitution

$$[\mathrm{S}] = |x'_3, \ldots, z'_1, \ldots, v'_3, \ldots, w'_1, \ldots \quad [\mathrm{X}_3], \ldots, [\mathrm{Z}_1], \ldots, [\mathrm{V}_3], \ldots, [\mathrm{W}_1], \ldots|$$

transforme $[\mathrm{Q}]$ et $[\mathrm{Q}']$ en $[\mathrm{P}]$ et $[\mathrm{P}']$; mais les deux fonctions $[\mathrm{Q}]$ et $[\mathrm{Q}']$ forment un système réduit analogue au système Q, Q′, sauf que le nombre des variables s'y trouve diminué de deux x', de deux v',.... De même $[\mathrm{P}]$ et $[\mathrm{P}']$ forment un système réduit analogue à P, P′. Ces deux systèmes sont équivalents; mais ils ne peuvent l'être, par hypothèse, que si l'on a

$$\alpha - 1 = \alpha' - 1, \ldots, \gamma = \gamma', \ldots, \varepsilon - 1 = \varepsilon' - 1, \ldots, \lambda_1 = \lambda'_1, \ldots.$$

On en déduit $\alpha = \alpha'$, $\varepsilon = \varepsilon', \ldots$, ce qui démontre le théorème.

18. L'analyse précédente repose sur l'hypothèse que P contient des variables $x_1, \ldots, v_1, \ldots$ qui ne figurent pas dans P′; mais un raisonnement tout à fait analogue s'appliquerait au cas où P′ contiendrait des variables qui ne figurent pas dans P. On raisonnerait encore de même si l'une des fonctions Q, Q′ contenait des variables qui ne figurent pas dans l'autre.

Reste à considérer le cas où chacune des quatre fonctions P, P′, Q, Q′ contiendrait toutes les variables. On aurait alors simplement

$$\mathrm{P} = \mathfrak{C}_1^{\alpha} + \mathfrak{C}_1^{\gamma} + \ldots, \quad \mathrm{P}' = m\lambda_1 \mathfrak{C} + \ldots + m\lambda_2 \mathfrak{C} + \ldots,$$
$$\mathrm{Q} = \mathfrak{C}_1^{\alpha} + \mathfrak{C}_1 + \ldots, \quad \mathrm{Q}' = m\lambda'_1 \mathfrak{C} + \ldots + m\lambda'_2 \mathfrak{C} + \ldots$$

mais, dans ce cas, les deux systèmes

$$\begin{aligned}
&P,\quad P'+\lambda_1 P = \mathfrak{B}_x^{\alpha}+\mathfrak{B}_y^{\beta}+\ldots-(\lambda_2-\lambda_1)\,\mathfrak{C}\ldots,\\
&Q,\quad Q'+\lambda_1 Q = \mathfrak{B}_x^{\alpha'}-(\lambda'_1-\lambda_1)\,\mathfrak{C}_x^{\alpha'}+\mathfrak{B}_y^{\beta'}-(\lambda'_2-\lambda_1)\,\mathfrak{C}_y^{\beta'}+\ldots
\end{aligned}$$

seront équivalents; mais ils sont réduits, et $P'+\lambda_1 P$ ne contient pas x_1 : on aura donc, d'après ce qui précède,

$$\alpha=\alpha',\quad \beta=\beta',\ \ldots,\quad \lambda'_1-\lambda_1=0,\quad \lambda_2-\lambda_1=\lambda'_2-\lambda_1,\ \ldots,$$

d'où

$$\lambda'_1=\lambda_1,\quad \lambda'_2=\lambda_2,\ \ldots,$$

ce qui démontre le théorème.

19. Pour juger si deux systèmes Σ, Σ' sont équivalents, il suffira donc de les réduire chacun de son côté. Si les deux réduites sont différentes, il n'y aura pas d'équivalence. Si, au contraire, elles sont identiques, soient S et T les substitutions qui réduisent respectivement les deux systèmes : il est clair qu'on passera de l'un à l'autre par la substitution $ST^{-1} = U$.

On obtiendra d'ailleurs évidemment toutes les substitutions qui transforment Σ' en Σ, en combinant la substitution U que nous venons de trouver avec les substitutions qui transforment Σ en lui-même. Pour déterminer commodément ces dernières substitutions, il convient de ramener d'abord le système Σ à sa forme réduite.

III. — *Transformation d'un système en lui-même.*

20. Problème. — *Déterminer toutes les substitutions qui transforment en lui-même le système réduit*

$$\begin{aligned}
&P = \mathfrak{A}_x^{\alpha}+\mathfrak{A}_y^{\beta}+\ldots+\mathfrak{B}_z^{\gamma}+\ldots+\mathfrak{C}_u^{\delta}+\ldots+\mathfrak{C}_v^{\varepsilon}+\ldots,\\
&P' = \mathfrak{B}_x^{\alpha}+\mathfrak{B}_y^{\beta}+\ldots+\mathfrak{C}_z^{\gamma}+\ldots+\mathfrak{B}_u^{\delta}+\ldots+\mathfrak{B}_v^{\varepsilon}-\lambda_1\,\mathfrak{C}_v^{\varepsilon}+\ldots.
\end{aligned}$$

Nous allons déterminer, *a priori*, certaines substitutions simples qui n'altèrent pas le système; nous démontrerons ensuite que toutes les

substitutions qui jouissent de cette propriété s'obtiennent par la combinaison de celles-là.

21. 1° *Substitutions qui n'altèrent que les variables* [illegible] Leur forme sera la suivante :

$$(16)\qquad \vert\, x_1, x_{\ldots}, x_{2\ldots}\quad a x_1, a^{\ldots} x_{\ldots}, a x_{2\ldots} \,\vert \text{[illegible]}$$

où a est une constante arbitraire.

On pourra opérer des substitutions analogues sur les variables des séries analogues $y, \ldots$

22. 2° *Substitutions qui n'altèrent que les variables d'une des séries* $z, \ldots, u, \ldots, v, \ldots$

Elles se réduisent à la forme

$$(17)\qquad \vert\, z_1, \ldots, z_{\ldots}\quad z_1, \ldots, z_{\ldots} \,\vert \text{[illegible]}$$

23. 3° *Substitutions qui altèrent les indices de deux des séries* $x, y, \ldots$

Considérons, par exemple, les deux séries x et y.

Le procédé suivant fournira les substitutions simples.

Accroissons l'une des variables extrêmes $x_1, y_1, x_{2\alpha+1}, y_{2\beta+1}$ d'un multiple de l'une des variables de l'autre série. On introduira dans l'une des fonctions $\mathcal{A}_x^\alpha + \mathcal{A}_y^\beta$, $\mathcal{B}_x^\alpha + \mathcal{B}_y^\beta$ un terme étranger, que l'on fera disparaître en modifiant une seconde variable. Cela fera, en général, paraître dans la seconde fonction un nouveau terme, que l'on détruira de même, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à modifier une autre des variables extrêmes. Alors l'opération sera achevée, et aura une substitution inaltérante. Chacune des substitutions ainsi obtenues rentre dans l'un des six types suivants :

$$(18)\qquad \left\vert \begin{array}{l} x_1, y_{2\beta+2}, x_3, \ldots \quad x_1 \ [\text{illegible}]\ a y_{2\ldots}, y_{2\ldots} \ [\text{illegible}]\ a x_2, x_3 - a y_{2\ldots} \\ \ldots\ldots\ldots, x_{2\alpha+1} \quad \ldots\ldots \quad \ldots, x_{2\alpha+1}\ [\text{illegible}]\ a y_{2\ldots} \end{array} \right\vert.$$

$$(19)\qquad \vert\, x_1, y_{2\beta}, \ldots, x_{2\alpha+1}\quad x_1\ [\text{illegible}]\ a y_{2\ldots}, \ldots\ [\text{illegible}]\ a x_{\ldots}, \ldots, x_{2\alpha}\ [\text{illegible}]\ a y_{2\ldots} \,\vert.$$

$$(20)\qquad \vert\, x_1, y_{2\beta}, \ldots, y_1\quad x_1\ [\text{illegible}]\ a y_{2\beta}, y_{2\ldots}\ [\text{illegible}]\ a x_{\ldots}, \ldots, y_1\ [\text{illegible}]\ a y_{\ldots} \,\vert.$$

(21) $\left| y_1, x_{2\rho}, \ldots, y_1 - a x_{[illegible]}, x_{2\rho+2} - a y_2, \ldots \quad \ldots, y_{2\rho}, \ldots, y_{[illegible]} - a x_{[illegible]} \right|$.

(22) $\left| y_1, x_{2\rho}, \ldots, y_1 + a x_{2\rho}, x_{[illegible]} - a y_2, \ldots \quad \ldots, y_{2\rho}, \ldots, y_2 - a x_{2\rho} \right|$,

(23) $\left| \ldots, y_{2\rho}, \ldots, x_{2\alpha+1} + a y_{2\rho}, y_{[illegible]} - a x_{[illegible]} \quad \ldots, y_{[illegible]}, \ldots, y_{[illegible]} - a x_{[illegible]} \right|$.

Dans chacune de ces substitutions, a est un coefficient arbitraire; ρ est un entier nul ou positif, mais qui doit être déterminé de telle sorte que les indices des variables x, y soient tous positifs et, respectivement, $\leqq 2\alpha + 2$, $\leqq 2\beta + 2$.

24. Voyons combien nous obtiendrons de substitutions simples distinctes.

Soit d'abord $\alpha > \beta$. Les types (18) et (19) devront être rejetés. Dans le type (20), il faudra poser $\rho > 0$, $\rho \leqq \beta$, d'où β solutions. Dans le type (21), ρ [illegible] 0 [illegible] α [illegible] β, d'où $\alpha - \beta + 1$ solutions. Dans le type (22), $\rho \leqq \alpha > \beta$, d'où $\alpha - \beta$ solutions. Dans le type (23), $\rho > 0 \leqq \beta$, d'où β solutions. On aura donc en tout $2\alpha + 1$ substitutions simples. On en aurait de même $2\beta + 1$, si α était $< \beta$.

Si $\alpha = \beta$, on en aura une de plus. Elle s'obtiendra en posant $\rho = 0$ dans le type (18).

25. 4° *Substitutions qui altèrent les variables d'une des séries* x, y,..., (telle que x) *et d'une des séries* z,..., (telle que z).

On les trouvera par le même procédé. Considérons d'abord celles qui n'altèrent pas la variable $z_{2\gamma+1}$. Elles appartiendront à trois types, identiques aux types (18), (19), (20), sauf le remplacement de y, β par z, γ.

Pour obtenir les autres, changeons $z_{2\gamma+1}$ en $z_{2\gamma+1} + a x_{2\rho}$, ρ étant > 0 et $\leqq \alpha$. On introduira par là dans l'expression $\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{B}_1$ le terme $\tau = a x_{2\rho} z_{2\gamma}$ et dans l'expression $\mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{C}_1$ les termes $\tau_1 = a^2 x_{2\rho}^2$, $\tau_2 = 2 a x_{2\rho} z_{2\gamma+1}$.

Le terme τ_2 disparaît par la substitution

$$\left| x_{[illegible]}, z, \ldots, x_{[illegible]} - 2 a z_{[illegible]}, z_{[illegible]} - 2 a x_{[illegible]}, \ldots \quad \ldots, z_{[illegible]}, \ldots, x_{[illegible]} - 2 a z_{[illegible]}, z_{2\gamma+1} \right|.$$

D'ailleurs, pour qu'il n'y entre pas d'indices négatifs, il faudra que l'on ait ρ [illegible] $\alpha - \gamma$: nous discuterons tout à l'heure cette condition.

La substitution ci-dessus accroît d'ailleurs le terme τ de la quantité $\tau_3 = 2a^2 x_{2\rho} x_{2\rho}$ [illegible]. On détruira ce nouveau terme τ_3 par la substitution

$$| x_2 \ldots x \ldots 2a^2 x \ldots |$$ [illegible]

laquelle introduira en revanche dans [illegible] un terme [illegible] τ_1, qui, joint à τ_1, donnera $-\tau_1$.

On détruira ensuite τ par la substitution

$$| x_{2\rho+1}, z, \ldots x \ldots az \ldots z \ldots ax \ldots |,$$ [illegible]

où la dernière variable altérée sera x_1 ou z_1, suivant qu'on aura $\rho \overline{\gtrless} \gamma$ ou ρ [illegible] γ.

Enfin $-\tau_1$ disparaîtra à son tour par la substitution

$$| x_{2\rho+1}, x_{2\rho}, \ldots, x_{2\rho} \ldots a^2 x \ldots x \ldots a x \ldots |.$$ [illegible]

ou la dernière variable altérée sera x_1 ou $x_{2\alpha+1}$, suivant qu'on aura 2ρ [illegible] α ou 2ρ [illegible] α.

Le produit de toutes les substitutions précédentes sera la substitution simple cherchée.

26. Voyons combien nous aurons de substitutions simples distinctes.

Soit d'abord α [illegible] γ. Les types (18) et (19) sont à rejeter. Le type (20) en donne γ, et le dernier type que nous venons de trouver en donne $\gamma + 1$; total $2\gamma + 1$ substitutions distinctes.

Si α [illegible] γ, les types (18) et (19) donneront respectivement γ [illegible] α [illegible] 1 et $\gamma - \alpha$ substitutions; le type (20) en donnera α, et le dernier type α : total $2\gamma + 1$.

27. 5° *Substitutions qui altèrent les variables d'une des séries* $x, y, \ldots$ (telle que x), *et d'une des séries* $u, \ldots$ (telle que u).

Le système des deux fonctions $\mathcal{A}_x^\alpha + \mathcal{C}_u^\delta$, $\mathcal{B}_x^\alpha + \mathcal{B}_u^\delta$ se change en $\mathcal{B}_x^\alpha + \mathcal{C}_u^\delta$, $\mathcal{A}_x^\alpha + \mathcal{B}_u^\delta$ par la substitution

$$S = | x_1, \ldots, x \ldots x \ldots, x_1 \ldots |.$$ [illegible]

Or les substitutions qui n'altèrent pas ce dernier système ne diffèrent de celles qu'on vient de trouver que par le changement de z, γ en u, δ.

Soient $T_1, T_2, \ldots$ ces substitutions. Les substitutions qui n'altèrent pas $\mathcal{A}_x^\alpha + \mathcal{C}_u^\delta$, $\mathcal{B}_x^\alpha + \mathcal{B}_u^\delta$ seront ST_1S^{-1}, $ST_2S^{-1}, \ldots$.

28. 6° *Substitutions qui altèrent les variables d'une des séries x, $y, \ldots$* (telle que x), *et d'une des séries $v, \ldots$* (telle que v).

Leur recherche se ramène également à la question précédente. En effet, la substitution

$$\Theta_\rho = \left| \begin{matrix} x_{2\rho-1}, x_{2\rho}, \ldots & x_{2\rho} - \lambda_1 x_{2\rho-1}, \ldots x_{2\rho-2} - \lambda_1 x_{2\rho}, \ldots \\ \ldots x_{2\rho-1} \ldots & \ldots \ldots x_{2\rho-1} \quad \lambda_1 x_{2\rho-1} \end{matrix} \right|$$

transforme $\mathcal{A}_x^\alpha$, $\mathcal{B}_x^\alpha$ en $\mathcal{A}_x^\alpha$, $\mathcal{B}_x^\alpha - \lambda_1 x_{2\rho-1} x_{2\rho}$. Par suite, la substitution

$$\Theta = \Theta_1 \Theta_2 \ldots \Theta_\alpha$$

transformera $\mathcal{A}_x^\alpha$, $\mathcal{B}_x^\alpha$ en $\mathcal{A}_x^\alpha$ et $\mathcal{B}_x^\alpha - \lambda_1 \mathcal{A}_x^\alpha$, et ΘS les transformera en $\mathcal{B}_x^\alpha$, $\mathcal{A}_x^\alpha - \lambda_1 \mathcal{B}_x^\alpha$. Cela posé, nous savons déterminer (**25** et **26**) les substitutions simples $T_1, T_2, \ldots$, qui transforment en elles-mêmes les fonctions $\mathcal{A}_x^\alpha + \mathcal{B}_\nu^\epsilon$, $\mathcal{B}_x^\alpha + \mathcal{C}_\nu^\epsilon$. Ces substitutions se confondent évidemment avec celles qui transforment en lui-même le système $\mathcal{B}_x^\alpha + \mathcal{C}_\nu^\epsilon$ et $\mathcal{A}_x^\alpha - \lambda_1 \mathcal{B}_x^\alpha + \mathcal{B}_\nu^\epsilon - \lambda_1 \mathcal{C}_\nu^\epsilon = \mathcal{A}_x^\alpha + \mathcal{B}_\nu^\epsilon - \lambda_1(\mathcal{B}_x^\alpha + \mathcal{C}_\nu^\epsilon)$, et les substitutions qui transforment $\mathcal{A}_x^\alpha + \mathcal{C}_\nu^\epsilon$ et $\mathcal{B}_x^\alpha + \mathcal{B}_\nu^\epsilon - \lambda_1 \mathcal{C}_\nu^\epsilon$ en elles-mêmes seront respectivement

$$\Theta S . T_1 (\Theta S)^{-1}, \quad \Theta S . T_2 (\Theta S)^{-1}, \ldots$$

29. 7° *Substitutions qui altèrent les variables de deux des séries $u, \ldots$*

Cherchons les substitutions simples qui n'altèrent pas les fonctions

$$\mathcal{B}_u^\delta + \mathcal{B}_t^\mu, \quad \mathcal{C}_u^\delta + \mathcal{C}_t^\mu.$$

Soit pour fixer les idées $\delta \leqq \mu$. On aura, en premier lieu, δ substitutions simples qui n'altèrent pas $t_{2\mu+1}$ et $u_{2\delta+1}$. Elles sont de la forme suivante :

$$| u_1, t_{2\rho}, \ldots, t_1 \quad u_1 + a t_{2\rho}, t_{2\rho} + a u_2, \ldots, t_1 + a u_{2\rho} |,$$

où ρ peut varier de 1 à δ.

30. Les autres substitutions simples altèrent toutes la variable $u_{2\delta+1}$ et s'obtiennent comme il suit :

Remplaçons $u_{2\sigma+1}$ par $u_{2\sigma+1} - at_{2\rho}$, nous aurons introduit dans la première fonction le terme $\tau = at_{2\rho}u_{2\sigma}$, et dans la seconde les termes $\tau_1 = a^2t_{2\rho}^2$, $\tau_2 = 2at_{2\rho}u_{2\sigma+1}$.

On détruira τ_2 par la substitution

$$| t_{2\rho+1}, u_{2\sigma}, \ldots, t_1 \quad t_{2\rho+1} - 2au_{2\sigma} \ldots u_{\ldots} - 2at_{\ldots} \ldots t \ldots au_{\ldots} |,$$

on aura d'ailleurs les conditions $\rho > 0$, $2\delta - 2\sigma - 3 > 0$, nécessaires pour éviter les indices négatifs.

Cette substitution accroîtra d'ailleurs τ de la quantité $\tau_3 = 2a^2t_{2\rho}t_{\ldots}$, qu'on fera disparaître par la substitution

$$| t_{\ldots+1} \quad t_{2\rho+1} - 2a^2t_{\ldots} |,$$

laquelle changera d'ailleurs $\ldots$ en $\ldots$

51. Proposons-nous maintenant de faire disparaître le terme τ.

Si $\delta = \rho + \mu$, on y parviendra immédiatement par la substitution

$$| t_{2\rho+1}, u_{2\ldots+1}, \ldots, u_1 \quad t_{2\rho+1} - au_{2\sigma}, u_{\ldots} \ldots au_{\ldots} \ldots u \ldots at_{\ldots} |;$$

sinon l'on emploiera la substitution

$$| t_{2\rho+1}, u_{2\ldots+1}, \ldots, t_{2\mu+1} \quad t_{2\rho+1} - au_{2\sigma}, u_{\ldots} \ldots at \ldots t \ldots au_{\ldots} |,$$

en posant, pour abréger,

$$\delta \ldots \rho \ldots \mu \ldots \sigma.$$

Cette substitution introduira dans la seconde fonction les termes $a^2u_{2\sigma}^2$ et $-2au_{2\sigma}t_{2\mu+1}$.

On fera disparaître ce dernier terme par la substitution

$$| u_{2\sigma-1}, t_{2\mu}, \ldots, u_1 \quad u_{2\sigma-1} - 2at_{2\mu+1}, t_{2\mu} \ldots 2au_{\ldots} \ldots u_1 \ldots 2at_{\ldots} |.$$

Cette substitution n'introduira aucun nouveau terme si

$$2\rho + 2\sigma - 2\mu \ldots 2$$

est nul ou négatif; sinon posons $\sigma' = \sigma \ldots \mu \ldots 1 \ldots \rho$. Le terme $\ldots a^2t\ldots$ sera changé en $-a^2 t_{2\rho} - 2au_{2\sigma} \ldots a^2t \ldots = 4a^2u_{\ldots}^2 - 4a^2t_{2\rho}u_{\ldots}$.

Si l'on a $2\sigma - 2\sigma' - 2 < 2\mu - 1$, ce dernier terme disparaîtra par la substitution

$$| u_{2\sigma+1}, t_{[illegible]}, \ldots, u_1, u_{2\sigma} - 4a^2 t_{[illegible]}, t_{[illegible]} - 4a^3 u_{2\sigma'}, \ldots, u_1, 4a^3 t_{2\mu-2\sigma'-2} |.$$

Dans le cas contraire, nous poserons $\sigma'' = \sigma' - (\mu + 1 - \rho)$, et nous emploierons la substitution

$$| u_{2\sigma+1}, t_{[illegible]}, \ldots, t_{[illegible]}, u_{2\sigma} - 4a^2 t_{[illegible]}, t_{[illegible]} + 4a^3 u_{2\sigma'}, \ldots, t_{[illegible]} + 4a^3 u_{2\sigma''} |,$$

laquelle introduira, dans la seconde fonction, les deux nouveaux termes $16a^6 u_{[illegible]}^2$ et $8a^5 u_{2\sigma'} t_{2[illegible]}$.

Ce dernier terme disparaîtra par la substitution

$$| u_{2\sigma}, \ldots, t_{[illegible]}, \ldots, u_1, u_{[illegible]} - 8a^4 t_{[illegible]}, \ldots, t_{[illegible]} - 8a^5 u_{[illegible]}, \ldots, u, 8a^5 t_{2\mu-2\sigma'+1} |,$$

laquelle n'introduira aucun nouveau terme, si $2\rho + 2\sigma'' - 2\mu - 2$ est nul ou négatif. Sinon, posons $\sigma''' = \sigma'' - (\mu + 1 - \rho)$; $-a^2 t_{2\rho}^2$ sera changé en $-a^2(t_{2\rho} + 8a^3 u_{2\sigma''})^2$ et donnera, par suite, deux nouveaux termes $-64a^8 u_{[illegible]}^2$ et $-16a^5 u_{2\sigma''} t_{2\rho}$.

On fera disparaître ce dernier terme par le même procédé que tout à l'heure, et ainsi de suite. On arrivera enfin à transformer $\mathfrak{B}_u^\delta + \mathfrak{B}_t^\mu$ en lui-même, et $\mathfrak{C}_u^\delta + \mathfrak{C}_t^\mu$ en

$$\mathfrak{C} + \mathfrak{C}' - a^2 t_{[illegible]}^2 + a^2 u_{[illegible]}^2 - 4a^4 u_{[illegible]}^2 + 16a^6 u_{[illegible]}^2 - 64a^8 u_{[illegible]}^2 + \ldots,$$

σ, σ', σ'',... étant les divers termes positifs de la suite

$$\delta - \rho - \mu,\quad \delta - \rho - \mu - (\mu + 1 - \rho),\quad \delta - \rho - \mu - 2(\mu + 1 - \rho), \ldots.$$

32. Cherchons maintenant à opérer sur les u une substitution qui fasse disparaître la série des termes

$$a^2 u_{[illegible]}^2 - 4a^4 u_{[illegible]}^2 + 16a^6 u_{[illegible]}^2 - 64a^8 u_{[illegible]}^2 + \ldots.$$

Cette question n'est évidemment qu'un cas particulier de la suivante :

Étant données les deux fonctions $\mathfrak{B}_u^\delta$ et $\mathfrak{C}_u^\delta + F$, où F est une fonction de la forme

$$F = A_{\delta\delta} u_{2\delta}^2 + \ldots + A_{mn} u_{2m} u_{2n} + \ldots,$$

où les indices m et n, variables d'un terme au suivant, satisfont à

l'inégalité

$$m + n > 2\delta,$$

trouver une substitution qui fasse disparaître les termes $A_{mn}u_{2m}u_{2n}$.

On peut construire aisément cette substitution par une formule récurrente.

Supposons, en effet, que nous soyons parvenu à faire disparaître tous ceux des termes considérés dans lesquels la somme $m + n$ dépasse une certaine limite k.

Soit $A_{mn}u_{2m}u_{2n}$ l'un des termes restants, dans lesquels $m + n = k$. On pourra le détruire par la substitution

$$\vert u_{2n-1}, u_{2m-1}, \ldots, u_{2q-1} \quad u_{2n-1} - A_{mn}u_{2m}, u_{2m-1} + A_{mn}u_{2n-2}, \ldots \vert.$$

Si $k \overline{\gtrless} \delta + 1$, la dernière variable altérée par cette substitution sera u_1, et le terme $A_{mn}u_{2m}u_{2n}$ disparaîtra sans être remplacé. On pourra détruire de même les suivants.

Soit, au contraire, $m + n > \delta + 1$. On devra, pour éviter les indices négatifs, s'arrêter à la variable $u_{2\delta+1}$, qui sera remplacée par

$$u_{2\delta+1} + A_{mn}u_{2k-2\delta-2}.$$

Cela posé, soit $A_{m'n'}u_{2m'}u_{2n'}$ un autre terme, où l'on ait

$$m' + n' = m + n = k.$$

On pourra le faire disparaître de même, mais en accroissant encore $u_{2\delta+1}$ de la quantité $A_{m'n'}u_{2k-2\delta-2}$: de même pour tous les termes analogues. Les autres termes n'auront pas été altérés. Donc, en posant, pour abréger, $A_{mn} + A_{m'n'} + \ldots = a$, $\varphi + F$ aura été changé en

$$\varphi_1 + (u_{2\delta+1} + au_{2k-2\delta-2})^2 - u_{2\delta+1}^2 + \ldots = \varphi + 2au_{2\delta+1}u_{2k-2\delta-2} + F_1,$$

F_1 étant une fonction analogue à F, mais ne contenant plus que des termes pour lesquels $m + n < k$.

On peut d'ailleurs faire disparaître le terme $2au_{2\delta+1}u_{2k-2\delta-2}$ par la substitution

$$\vert u_{2k-2\delta-1}, u_{2\delta}, \ldots, u_1 \quad u_{2k-2\delta-1} - 2au_{2\delta+1}, u_{2\delta} + 2au_{2k-2\delta-2}, \ldots, u_1 \pm u_{4\delta-2k+3} \vert.$$

Cette substitution pourra altérer quelques-unes des variables qui figurent dans F_1; mais elle les accroîtra de fonctions de variables d'indice moindre (car, k étant au plus égal à 2δ, on a $2\delta - 2k = 2\delta - 2$). Donc, après la transformation, F_1 sera changé en une fonction de même forme, qu'il sera aisé de calculer et pour tous les termes de laquelle on aura encore $m + n < k$.

On fera de même disparaître de F_1 les termes où la somme des indices est maximum, et ainsi de suite.

33. Par un procédé analogue, on fera disparaître le terme $-a^2 t_{2\rho}^2$: il ne restera plus qu'à faire le produit de toutes les substitutions partielles que nous venons de définir pour obtenir la substitution simple que nous cherchions; et l'on voit aisément qu'elle remplacera $u_{2\delta+1}$ par $u_{2\delta+1} + at_{2\rho} + f$, où f est une fonction linéaire de $t_{2\rho-2}, \ldots, t_2, u_{2\delta}, \ldots, u_2$.

Si $\delta < \mu$, posant successivement $\rho = 1, 2, \ldots, \delta + 1$, nous obtiendrons $\delta + 1$ substitutions évidemment distinctes, et contenant chacune une constante arbitraire. En les joignant aux δ substitutions du n° **29**, on aura en tout $2\delta + 1$.

Si $\delta = \mu$, on ne pourra donner à ρ que les valeurs $1, 2, \ldots, \delta$. Mais il existe une autre substitution simple spéciale à ce cas. On peut, en effet, opérer sur $u_{2\delta+1}, t_{2\delta+1}$ une substitution orthogonale, à la charge d'opérer en même temps son inverse sur $u_{2\delta}, t_{2\delta}$, la substitution initiale sur $u_{2\delta-1}, t_{2\delta-1}$, etc.

34. 8° *Substitutions qui altèrent les variables de deux séries $z, \ldots$ ou de deux séries $v, \ldots$, dans lesquelles le coefficient λ ait la même valeur.*

Elles se trouvent par un procédé identique au précédent. Il est clair, en effet, que les substitutions qui transforment en elles-mêmes les deux fonctions

$$\mathfrak{C}'_1 - \mathfrak{C}_1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}'_1 - \lambda_1 \mathfrak{C}'_1 + \mathfrak{B}_1 - \lambda_1 \mathfrak{C}_1,$$

par exemple, seront les mêmes qui transforment en elles-mêmes les deux fonctions

$$\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{C}'_1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}'_1 - \mathfrak{B}_1.$$

53. Il nous reste à établir que toute substitution qui transforme en elles-mêmes les deux fonctions quadratiques P et P′ résulte de la combinaison des substitutions simples que nous avons trouvées ci-dessus.

Nous admettrons d'abord que cette proposition soit vraie pour les fonctions qui contiennent moins de variables que les proposées.

Soit, pour fixer les idées,

$$P = [illegible],$$
$$P' = [illegible],$$

et soit S une substitution qui transforme P et P′ en elles-mêmes.

On a vu (nos 15 et 16) 1° que la substitution S doit remplacer les variables $x_2,\ldots, z_1,\ldots, v_2,\ldots, w_1,\ldots$, que P′ contient, par des fonctions de ces seules variables; 2° qu'elle remplace x_2, v_2 par des fonctions de x_2 et v_2 seulement.

On aura donc

$$S = \begin{vmatrix} x_1, v_1, & f(x_1,\ldots, w_2,\ldots), & f'(x_1,\ldots, w_2,\ldots) \\ x_2, v_2, & \varphi(x_2, v_2), & \varphi'(x_2, v_2) \\ x_3,\ldots, & [X_3] + \psi(x_2, v_2,\ldots), & \ldots \\ z_1,\ldots, & [Z_1] + \psi'(x_2, v_2,\ldots), & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix},$$

$[X_3],\ldots, [Z_1],\ldots$ étant des fonctions des variables $x_3,\ldots, z_1,\ldots, v_3,\ldots, w_1,\ldots$ seulement.

Cela posé, soient [P], [P′] ce que deviennent P et P′ en y posant $x_2 = v_2 = 0$; pour que S transforme P et P′ en elles-mêmes, il faudra évidemment que la substitution

$$[S] = \begin{vmatrix} x_3, & \ldots & [X_3], & \ldots \\ z_1, & \ldots & [Z_1], & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

transforme [P] et [P′] en elles-mêmes.

Donc, par hypothèse, [S] résultera d'un certain nombre de substitutions simples formées pour le système [P], [P′] de la manière que nous avons indiquée.

Or, si l'on se reporte à la loi de formation des substitutions simples,

on voit que celles qui sont relatives au système $[P]$, $[P']$ dérivent de celles relatives au système P, P' de la même manière que $[S]$ dérive de S, c'est-à-dire par la suppression des indices x_1, y_1, x_2, y_2. En effet, cela est évident pour chacune des substitutions partielles dont le produit forme chaque substitution simple.

Soient donc $[T]$, $[T'],\ldots$ les substitutions simples relatives au système $[P]$, $[P']$; T, $T',\ldots$ celles relatives au système P, P', dont elles dérivent; S_1 une substitution formée avec T, $T',\ldots$, de la même manière que $[S]$ l'est avec $[T]$, $[T']$. La substitution S_1 sera évidemment de la forme

$$S_1 = \left| \begin{array}{ll} x_1, y_1 & f_1(x_1,\ldots,w_{2\zeta+1}),\ f'_1(x_1,\ldots,w_{2\zeta+1}) \\ x_2, y_2 & \varphi_1(x_2,y_2),\ \varphi'_1(x_2,y_2) \\ x_3,\ldots & [X_1]+\psi_1(x_2,y_2),\ldots \\ z_1,\ldots & [Z_1]+\psi'_1(x_2,y_2),\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right|$$

et l'on aura évidemment

$$S = S_1 S_2,$$

S_2 étant une substitution de la forme

$$S_2 = \left| \begin{array}{ll} x_1, y_1 & f_2(x_1,\ldots,w_{2\zeta+1}),\ f'_2(x_1,\ldots,w_{2\zeta+1}) \\ x_2, y_2 & \varphi_2(x_2,y_2),\ \varphi'_2(x_2,y_2) \\ x_3,\ldots & x_3+\psi_2(x_2,y_2),\ldots \\ z_1,\ldots & z_1+\psi'_2(x_2,y_2),\ldots \\ v_1,\ldots & v_1+\psi''_2(x_2,y_2),\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right|$$

et qui transformera encore P, P' en elles-mêmes.

36. Or on a

$$P' = x_2 x_3 - y_2 y_3 - F(x_4,\ldots,z_1,\ldots,v_1,\ldots,w_1,\ldots),$$

F étant une fonction de déterminant $\gtrless 0$. Si l'on effectue sur P' la substitution S_2, les termes de la transformée où x_2, y_2 se trouveront mul-

tipliés par $x_1, \ldots, z_1, \ldots, v_1, \ldots, w_1, \ldots$ seront

$$\ldots + \frac{\partial F}{\partial v_1}\psi'_2 + \ldots,$$

et ne pourront s'annuler (ce qui doit être), que si ψ'_2 et ses analogues sont identiquement nulles, les fonctions $\frac{\partial F}{\partial v_1}, \cdots$ étant distinctes.

Cela posé, les termes de la transformée de P' qui contiennent x_2, v_2 seront $\varphi_2 x_3 + \psi_2^2 + \varphi'_2 v_3 + \psi'^2_2$, et comme ils doivent se réduire à $x_2 x_3 + v_2 v_3$, on aura $\varphi_2 = x_2$, $\varphi'_2 = v_2$. En outre, pour qu'il n'y ait pas de terme en x_2^2 ni en v_2^2, il faudra que ψ_2 soit indépendant de x_2, et ψ'_2 indépendant de v_2.

Par suite, en supprimant dans l'écriture les variables que S_2 n'altère pas, on aura simplement

$$S_2 = \left| \begin{array}{ll} x_1, v_1 & f_2, f'_2 \\ x_3, v_3 & x_3 + av_2, v_3 + bx_2 \end{array} \right|.$$

37. Or, parmi nos substitutions simples, il s'en trouve toujours une T, de même forme que S_2 et qui remplace v_3 par $v_3 + bx_2$. Si, par exemple, α et ε sont > 1, ce sera la suivante :

$$T = | x_1, v_3, x_3, v_1 \quad x_1 - bv_3, v_3 + bx_2, x_3 - bv_2, v_1 - bx_3 |.$$

Cela posé, on aura

$$S_2 = TS_3,$$

S_3 étant une nouvelle substitution de même forme que S_2, mais qui laisse v_3 invariable. D'ailleurs S_3 ne doit pas altérer P'; il faut pour cela que S_3 laisse x_3 invariable. D'autre part, S_3 ne doit pas altérer P. On doit donc avoir

$$f_2 x_2 + f'_2 y_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

d'où

$$f_2 = x_1 + cy_2, \quad f'_2 = y_1 + cy_2.$$

Mais alors S_3 est une de nos substitutions simples ; et $S = S_1 T S_3$ sera un produit de substitutions simples, ce qu'il fallait démontrer.

58. La démonstration qui précède suppose qu'il existe des variables des espèces x ou v, autrement dit, que P′ a son déterminant nul. Si P avait son déterminant nul, on raisonnerait d'une manière analogue.

Reste le cas où P et P′ auraient leur déterminant $\gtrless$ o. Ils seraient alors de la forme

$$P = Q_u + Q'_u + \ldots$$
$$P' = \mathfrak{P}_u + \lambda Q_u + \mathfrak{P}'_u + \lambda' Q'_u + \ldots$$

et l'on pourrait raisonner sur les fonctions P et P′ − λP, cette dernière ayant son déterminant nul.

59. On peut donc toujours ramener la démonstration du théorème à la même démonstration pour un moindre nombre de variables, jusqu'au moment où l'une des fonctions considérées, P′ par exemple, se réduira identiquement à zéro. L'autre se réduira à une somme de carrés et les substitutions qui la transforment en elles-mêmes seront orthogonales. Or on sait qu'une substitution orthogonale quelconque résulte de substitutions orthogonales partielles opérées chacune sur deux variables seulement; mais ce sont là des substitutions simples. Le théorème est donc vérifié.

Juin 1874.

Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville;

Par M. BESGE.

« ... Soient α une constante positive ou négative, mais d'une valeur absolue a qui est < 1, et x une variable indépendante de 0 à π. Désignons d'ailleurs par la caractéristique $f(t)$ une fonction développable en série d'après la formule de Maclaurin, suivant les puissances de sa variable supposée réelle ou imaginaire; enfin considérons l'intégrale définie

$$A = \int_0^{\pi} \frac{dx\left[f\left(\alpha e^{x\sqrt{-1}}\right) + f\left(\alpha e^{-x\sqrt{-1}}\right)\right]}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}}.$$

» Je dis que cette intégrale est susceptible d'une grande réduction et qu'elle est simplement égale au double de la suivante :

$$\int_0^{\pi} \frac{f(a\sin x)\,dx}{\sqrt{1 - a^2\sin^2 x}}.$$

» Voilà du moins ce que j'ai cru constater par une méthode assez délicate, il est vrai. Si mon théorème est exact, comme j'en ai la confiance, nos jeunes géomètres en auront bientôt obtenu la démonstration.

» Ils verront ensuite bien aisément qu'on peut aussi traiter le cas où l'on aurait $a > 1$, et qu'il se ramène sans peine à celui de $a < 1$.

» La manière de passer de l'un de ces cas à l'autre est trop facile à voir *a priori* pour que j'y insiste. »

De la détermination, sous forme intégrable, des équations des courbes dont le rayon de courbure et le rayon de torsion sont liés par une relation donnée quelconque;

PAR M. H. MOLINS.

1. Nous nous proposons de montrer que, par un choix convenable de la variable indépendante, on peut toujours ramener aux quadratures la détermination des courbes dont les rayons de courbure et de torsion sont des fonctions données de cette variable; et cette recherche comprendra celle des courbes dont les deux rayons sont liés par une relation donnée quelconque, car à cette relation on n'aura qu'à joindre une autre relation, prise arbitrairement entre ces rayons et la variable indépendante, ce qui déterminera le rayon de courbure et le rayon de torsion en fonction de la même variable.

Considérons une courbe quelconque rapportée à trois axes rectangulaires, et désignons par ε son angle de contingence, par ω son angle de torsion, par ρ son rayon de courbure et par r son rayon de torsion. Les quantités ε et ω sont données par les formules suivantes :

$$\varepsilon = \sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2},$$

$$\omega\, ds^3 = dx\,(d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y) + dy\,(d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z) + dz\,(d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x).$$

Nous supposerons d'abord que l'on prend l'arc s pour variable indépendante; posons

$$\frac{dx}{ds} = u, \quad \frac{dy}{ds} = v, \quad \frac{dz}{ds} = w;$$

les formules précédentes deviennent

$$(1)\qquad \frac{d\varepsilon}{ds} = \sqrt{\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dw}{ds}\right)^2},$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{d\varepsilon}{ds} &= u\left(\frac{dv}{ds}\frac{d^2w}{ds^2} - \frac{dw}{ds}\frac{d^2v}{ds^2}\right) \\ &\quad + v\left(\frac{dw}{ds}\frac{d^2u}{ds^2} - \frac{du}{ds}\frac{d^2w}{ds^2}\right) + w\left(\frac{du}{ds}\frac{d^2v}{ds^2} - \frac{dv}{ds}\frac{d^2u}{ds^2}\right). \end{aligned}\right.$$

2. Les trois quantités u, v, w étant liées par la relation

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1,$$

on peut les exprimer en fonctions de deux nouvelles variables θ et ζ, comme il suit :

$$u = \cos\theta \sin\zeta, \quad v = \sin\theta \sin\zeta, \quad w = \cos\zeta.$$

On en déduit $\tang\theta = \frac{v}{u} = \frac{dy}{dx}$, de sorte que θ est l'angle formé avec le plan xz par le plan conduit suivant la tangente de la courbe parallèlement à l'axe des z; quant à l'angle ζ, c'est l'angle que fait la même tangente avec l'axe des z. La différentiation de u, v, w donne ensuite

$$\begin{aligned} du &= -\sin\theta \sin\zeta \, d\theta + \cos\theta \cos\zeta \, d\zeta, \\ dv &= \cos\theta \sin\zeta \, d\theta + \sin\theta \cos\zeta \, d\zeta, \\ dw &= -\sin\zeta \, d\zeta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2u &= -\cos\theta \sin\zeta \, d\theta^2 - 2\sin\theta \cos\zeta \, d\theta \, d\zeta \\ &\quad - \sin\theta \sin\zeta \, d^2\theta - \cos\theta \sin\zeta \, d\zeta^2 + \cos\theta \cos\zeta \, d^2\zeta, \\ d^2v &= -\sin\theta \sin\zeta \, d\theta^2 + 2\cos\theta \cos\zeta \, d\theta \, d\zeta \\ &\quad + \cos\theta \sin\zeta \, d^2\theta - \sin\theta \sin\zeta \, d\zeta^2 + \sin\theta \cos\zeta \, d^2\zeta, \\ d^2w &= -\cos\zeta \, d\zeta^2 - \sin\zeta \, d^2\zeta. \end{aligned}$$

On trouve alors

$$du^2 + dv^2 + dw^2 = d\zeta^2 + \sin^2\zeta \, d\theta^2;$$

par suite, en remplaçant $\frac{\varepsilon}{ds}$ par $\frac{1}{\rho}$ dans la formule (1),

$$(3)\qquad \frac{1}{\rho^2} = \frac{d\zeta^2}{ds^2} + \sin^2\zeta\,\frac{d\theta^2}{ds^2}.$$

3. Quant à la formule (2), elle peut se mettre sous la forme

$$(4)\qquad \frac{1}{\rho^2}\frac{\omega}{ds} = \left(v\frac{dw}{ds} - w\frac{dv}{ds}\right)\frac{d^2u}{ds^2} + \left(w\frac{du}{ds} - u\frac{dw}{ds}\right)\frac{d^2v}{ds^2} + \left(u\frac{dv}{ds} - v\frac{du}{ds}\right)\frac{d^2w}{ds^2}.$$

Or on obtient

$$\begin{aligned} v\frac{dw}{ds} - w\frac{dv}{ds} &= -\sin\theta\sin^2\zeta\frac{d\zeta}{ds} - \cos\zeta\left(\cos\theta\sin\zeta\frac{d\theta}{ds} + \sin\theta\cos\zeta\frac{d\zeta}{ds}\right) \\ &= -\sin\theta\frac{d\zeta}{ds} - \cos\theta\sin\zeta\cos\zeta\frac{d\theta}{ds}, \\ w\frac{du}{ds} - u\frac{dw}{ds} &= \cos\theta\sin^2\zeta\frac{d\zeta}{ds} + \cos\zeta\left(-\sin\theta\sin\zeta\frac{d\theta}{ds} + \cos\theta\cos\zeta\frac{d\zeta}{ds}\right) \\ &= \cos\theta\frac{d\zeta}{ds} - \sin\theta\sin\zeta\cos\zeta\frac{d\theta}{ds}, \\ u\frac{dv}{ds} - v\frac{du}{ds} &= \cos\theta\sin\zeta\left(\cos\theta\sin\zeta\frac{d\theta}{ds} + \sin\theta\cos\zeta\frac{d\zeta}{ds}\right) \\ &\quad - \sin\theta\sin\zeta\left(-\sin\theta\sin\zeta\frac{d\theta}{ds} + \cos\theta\cos\zeta\frac{d\zeta}{ds}\right) = \sin^2\zeta\frac{d\theta}{ds}, \end{aligned}$$

expressions qui, jointes à celles de $\frac{d^2u}{ds^2}$, $\frac{d^2v}{ds^2}$, $\frac{d^2w}{ds^2}$, font prendre au second membre de la formule (4) la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\left(\cos\theta\sin\zeta\frac{d\theta^2}{ds^2} + 2\sin\theta\cos\zeta\frac{d\theta}{ds}\frac{d\zeta}{ds} + \sin\theta\sin\zeta\frac{d^2\theta}{ds^2}\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \cos\theta\sin\zeta\frac{d\zeta^2}{ds^2} - \cos\theta\cos\zeta\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right) \\ &\quad \times \left(\sin\theta\frac{d\zeta}{ds} + \cos\theta\sin\zeta\cos\zeta\frac{d\theta}{ds}\right) \\ &\quad + \left(-\sin\theta\sin\zeta\frac{d\theta^2}{ds^2} + 2\cos\theta\cos\zeta\frac{d\theta}{ds}\frac{d\zeta}{ds} + \cos\theta\sin\zeta\frac{d^2\theta}{ds^2}\right. \\ &\qquad\qquad \left. - \sin\theta\sin\zeta\frac{d\zeta^2}{ds^2} + \sin\theta\cos\zeta\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right) \\ &\quad \times \left(\cos\theta\frac{d\zeta}{ds} - \sin\theta\sin\zeta\cos\zeta\frac{d\theta}{ds}\right) - \left(\cos\zeta\frac{d\zeta^2}{ds^2} + \sin\zeta\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right)\sin^2\zeta\frac{d\theta}{ds}. \end{aligned}$$

ou bien, toutes réductions faites,

$$2\cos\zeta\frac{d\omega}{ds}\frac{d\zeta}{ds} + \sin\zeta\frac{d\zeta}{ds}\frac{d^2\omega}{ds^2} + \sin^2\zeta\cos\zeta\frac{d\omega}{ds} - \sin\zeta\frac{d\omega}{ds}\frac{d^2\omega}{ds^2}.$$

La formule (4) elle-même devient

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d[illegible]}{ds} = 2\cos\zeta\frac{d\omega}{ds}\frac{d\zeta}{ds} + \sin\zeta\frac{d\zeta}{ds}\frac{d^2\omega}{ds^2} + \sin^2\zeta\cos\zeta\frac{d\omega}{ds} - \sin\zeta\frac{d\omega}{ds}\frac{d^2\omega}{ds^2}$$

ou bien

$$(5)\qquad \frac{d[illegible]}{ds} = \rho^2\frac{d\omega}{ds}\left(2\cos\zeta\frac{d\zeta}{ds} + \sin\zeta\frac{d\zeta}{ds}\frac{\frac{d^2\omega}{ds^2}}{\frac{d\omega}{ds}} + \sin^2\zeta\cos\zeta\frac{d\omega}{ds} - \sin\zeta\frac{d^2\omega}{ds^2}\right)$$

Or la formule (3) donne

$$(6)\qquad \frac{d\omega}{ds} = \frac{1}{\rho\sin\zeta}\sqrt{1-\rho^2\frac{d\zeta^2}{ds^2}},$$

d'où

$$\frac{d^2\omega}{ds^2} = -\frac{1}{\rho^2\sin^2\zeta}\sqrt{1-\rho^2\frac{d\zeta^2}{ds^2}}\left(\rho\cos\zeta\frac{d\zeta}{ds} + \sin\zeta\frac{d\rho}{ds}\right) - \frac{\frac{d\zeta}{ds}\left(\rho\frac{d^2\zeta}{ds^2} + \frac{d\rho}{ds}\frac{d\zeta}{ds}\right)}{\sin\zeta\sqrt{1-\rho^2\frac{d\zeta^2}{ds^2}}}.$$

En substituant ces expressions dans la formule (5), on trouve

$$\frac{d[illegible]}{ds} = \frac{\rho}{\sin\zeta}\sqrt{1-\rho^2\frac{d\zeta^2}{ds^2}}\left[\frac{1}{\rho^2}\cos\zeta - \frac{1}{\rho}\sin\zeta\left(\rho\frac{d^2\zeta}{ds^2} + \frac{d\zeta}{ds}\frac{d\rho}{ds}\right) - \frac{\rho\sin\zeta\frac{d\zeta^2}{ds^2}\left(\rho\frac{d^2\zeta}{ds^2} + \frac{d\rho}{ds}\frac{d\zeta}{ds}\right)}{1-\rho^2\frac{d\zeta^2}{ds^2}}\right]$$

$$= \frac{1}{\rho}\sqrt{1-\rho^2\frac{d\zeta^2}{ds^2}}\left[\cot\zeta - \frac{\rho\left(\rho\frac{d^2\zeta}{ds^2} + \frac{d\zeta}{ds}\frac{d\rho}{ds}\right)}{1-\rho^2\frac{d^2\zeta}{ds^2}}\right]$$

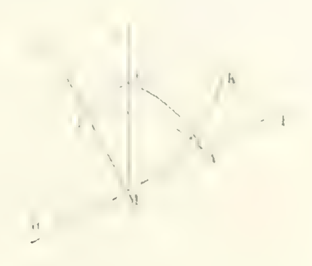
$$= \frac{1}{\rho\sqrt{1-\rho^2\frac{d\zeta^2}{ds^2}}}\left[\left(1-\rho^2\frac{d\zeta^2}{ds^2}\right)\cot\zeta - \rho\left(\rho\frac{d^2\zeta}{ds^2} + \frac{d\zeta}{ds}\frac{d\rho}{ds}\right)\right].$$

Remplaçant enfin [illegible] par [illegible], il vient

$$[illegible]$$

Si ρ et r étaient donnés en fonction de s, l'équation (7), qui suppose que s a servi de variable indépendante, serait une équation différentielle du second ordre à deux variables s et ζ, dont l'intégrale ferait connaître la quantité ζ; et, quant à la quantité θ, sa détermination se ramènerait à une quadrature, au moyen de l'équation (6). Mais il importe de changer de variable indépendante, en prenant pour nouvelle variable la quantité ζ, c'est-à-dire l'angle que fait la tangente de la courbe cherchée avec l'axe des z, et en admettant que ρ et r sont des fonctions données de ζ. Nous déterminerons ensuite θ et, par suite, x, y, z en fonction de ζ, ce qui fera connaître les courbes qui répondent aux expressions de ρ et r; d'ailleurs l'une des deux relations qui lient ρ et r à ζ pourra être remplacée par une relation, prise arbitrairement entre ρ et r, de sorte que nous aurons obtenu les courbes dont le rayon de courbure et le rayon de torsion sont liés par une relation donnée quelconque.

4. Soient HK une quelconque des courbes cherchées, MT la tangente en un point M, pris arbitrairement sur cette courbe, MN la nor-



male principale, MZ une parallèle menée par le point M à l'axe des z. Considérons un triangle sphérique ABC tracé sur une sphère ayant pour

centre le point M et pour rayon l'unité; il vient

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

ou bien, puisque $c = \frac{\pi}{2}$ et $b = \zeta$,

$$\cos a = \sin\zeta \cos A.$$

Mais a étant l'angle que fait le rayon de courbure avec l'axe des z, et $\cos\zeta$ étant égal à $\frac{dz}{ds}$, on a par une formule connue

$$\cos a = \frac{\rho}{ds}\, d\cos\zeta.$$

Égalant ces deux expressions de $\cos a$, et remplaçant $d\cos\zeta$ par $-\sin\zeta\, d\zeta$, on trouve

$$(8) \qquad \cos A = -\rho \frac{d\zeta}{ds},$$

ce qui montre que la quantité $-\rho\frac{d\zeta}{ds}$ est la valeur du cosinus de l'angle que fait le plan osculateur AMB de la courbe HK avec le plan AMC mené par la tangente MT parallèlement à l'axe des z. D'ailleurs la normale principale MN étant perpendiculaire à la droite MT, intersection de ces deux plans, on voit que cet angle A est le même que l'angle formé par le rayon de courbure avec le plan AMC, lequel est tangent en M au cylindre passant par la courbe HK et dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z.

5. La relation (8) donne

$$\sqrt{1 - \rho^2 \frac{d\zeta^2}{ds^2}} = \sin A, \quad \rho \frac{d^2\zeta}{ds^2} + \frac{d\rho}{ds}\frac{d\zeta}{ds} = -\frac{d\cos A}{ds};$$

par suite l'équation (7) devient

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1}{\sin A}\left(\sin^2 A \cot\zeta + \rho \frac{d\cos A}{ds}\right),$$

ou bien

$$(9)\qquad \frac{\rho}{r} = \sin A \cot\zeta + \frac{\rho}{\sin A}\,\frac{d\cos A}{ds}.$$

Mais, puisque la quantité ζ sert maintenant de variable indépendante on posera

$$\frac{d\cos A}{ds} = \frac{d\cos A}{d\zeta}\,\frac{d\zeta}{ds},$$

ou bien, en vertu de la formule $\frac{d\zeta}{ds} = -\frac{1}{\rho}\cos A$,

$$\frac{d\cos A}{ds} = -\frac{1}{\rho}\cos A\,\frac{d\cos A}{d\zeta} = \frac{1}{\rho}\sin A\,\frac{d\sin A}{d\zeta}.$$

La relation (9) prendra dès lors la forme

$$(10)\qquad \frac{d\sin A}{d\zeta} + \sin A\cot\zeta = \frac{\rho}{r};$$

et comme ρ et r sont, par hypothèse, des fonctions données de ζ, on voit que l'équation (10) est une équation différentielle linéaire du premier ordre, à deux variables ζ et $\sin A$, dont l'intégrale est

$$\sin A = e^{-\int\cot\zeta\,d\zeta}\left[C + \int\frac{\rho}{r}\,e^{\int\cot\zeta\,d\zeta}\,d\zeta\right],$$

C étant une constante arbitraire, ou bien, en remarquant que

$$e^{\int\cot\zeta\,d\zeta} = e^{l\sin\zeta} = \sin\zeta,$$

$$(11)\qquad \sin A = \frac{1}{\sin\zeta}\left[C + \int\frac{\rho}{r}\sin\zeta\,d\zeta\right].$$

6. L'angle A se trouvant déterminé, l'angle θ s'ensuivra, car l'équation (6) donne

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin A}{\rho\sin\zeta},$$

ou bien, en posant $\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{d\zeta}\,\frac{d\zeta}{ds} = -\frac{1}{\rho}\cos A\,\frac{d\theta}{d\zeta}$,

$$-\frac{1}{\rho}\cos A\,\frac{d\theta}{d\zeta} = \frac{\sin A}{\rho\sin\zeta}.$$

d'où

$$(12)\qquad \frac{d\theta}{d\zeta} = -\frac{\operatorname{tang} A}{\sin\zeta}.$$

On a donc, en désignant par θ_0 une nouvelle constante arbitraire,

$$(13)\qquad \theta = \theta_0 - \int \frac{\operatorname{tang} A}{\sin\zeta}\, d\zeta,$$

formule où tang A devra être remplacé par sa valeur en fonction de ζ, déduite de la formule (11).

On remarquera que, d'après les formules (11) et (13), les valeurs de A et θ ne dépendent que du rapport $\frac{\rho}{r}$, quelles que soient les valeurs de ρ et r en fonction de ζ.

7. La valeur de θ, substituée dans les expressions de u, v, w, fera connaître les quantités $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, qu'on remplacera par les expressions suivantes :

$$\frac{dx}{ds} = -\frac{\cos A}{\rho}\frac{dx}{d\zeta},\quad \frac{dy}{ds} = -\frac{\cos A}{\rho}\frac{dy}{d\zeta},\quad \frac{dz}{ds} = -\frac{\cos A}{\rho}\frac{dz}{d\zeta};$$

on aura

$$\frac{dx}{d\zeta} = -\frac{\rho}{\cos A}\cos\theta\sin\zeta,$$

$$\frac{dy}{d\zeta} = -\frac{\rho}{\cos A}\sin\theta\sin\zeta,$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = -\frac{\rho}{\cos A}\cos\zeta,$$

d'où, en représentant par x_0, y_0, z_0 trois nouvelles constantes arbitraires,

$$(14)\qquad \begin{cases} x - x_0 = -\displaystyle\int \frac{\rho}{\cos A}\cos\theta\sin\zeta\, d\zeta, \\ y - y_0 = -\displaystyle\int \frac{\rho}{\cos A}\sin\theta\sin\zeta\, d\zeta, \\ z - z_0 = -\displaystyle\int \frac{\rho}{\cos A}\cos\zeta\, d\zeta. \end{cases}$$

Ces équations, donnant les valeurs de x, y, z en fonction de la variable indépendante ζ, déterminent une quelconque des courbes cherchées.

8. On remarquera que, si l'on pose $\int_0^\zeta \frac{\operatorname{tang} A}{\sin \zeta} d\zeta = F(\zeta)$, la formule (13) donne

$$\theta - \theta_0 - F(\zeta) = 0,$$

ce qui est l'équation, en coordonnées polaires sphériques, de l'indicatrice de la courbe dont il s'agit. Considérons, en effet, une sphère d'un rayon égal à l'unité, qui aurait pour centre l'origine des coordonnées, et, de ce centre, imaginons que l'on mène des parallèles aux diverses tangentes de la courbe : le lieu des points où ces parallèles rencontrent la surface de la sphère est ce qu'on nomme l'*indicatrice sphérique*. Or, en prenant pour pôle le point où la partie positive de l'axe des z rencontre cette surface, et pour axe polaire le grand cercle déterminé par le plan xz, il est clair que θ est l'angle polaire et ζ le rayon vecteur d'un point quelconque de l'indicatrice.

9. Appliquons ce qui précède à l'examen de quelques cas remarquables.

En premier lieu, déterminons $\frac{\rho}{r}$ en fonction de ζ par la condition qu'on ait

$$\operatorname{tang} A = p \sin \zeta,$$

p étant une constante donnée; la formule (13) devient

$$\theta = \theta_0 - p\zeta.$$

Les valeurs de $\sin A$ et $\cos A$ en fonction de ζ sont alors

$$\sin A = \frac{p \sin \zeta}{\sqrt{1 + p^2 \sin^2 \zeta}}, \quad \cos A = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 \sin^2 \zeta}},$$

et il vient, en vertu de la formule (11),

$$\frac{p \sin^2 \zeta}{\sqrt{1 + p^2 \sin^2 \zeta}} = C + \int_0^\zeta \frac{\rho}{r} \sin \zeta \, d\zeta,$$

d'où l'on déduit par la différentiation

$$\frac{\rho}{r} = \frac{p\cos\zeta\,(1+p^2\sin^2\zeta)}{1+p^2\sin^2\zeta}.$$

Mais il importe de remarquer que cette valeur de $\frac{\rho}{r}$ ne donne, en effet, $\tang A = p\sin\zeta$, qu'en supposant que la constante C reçoive une valeur particulière. Or on a

$$\sin A = \frac{1}{\sin\zeta}\left[C - \int \frac{2p\sin\zeta\cos\zeta\,(1+p^2\sin^2\zeta) - p^3\sin^3\zeta\cos\zeta}{(1+p^2\sin^2\zeta)^{\frac{3}{2}}}\,d\zeta\right].$$

ou bien, en effectuant l'intégration indiquée au second membre,

$$\sin A = \frac{1}{\sin\zeta}\left[C - \frac{p\sin^2\zeta}{\sqrt{1+p^2\sin^2\zeta}}\right];$$

et l'on voit qu'il faut faire $C = 0$ pour qu'on ait $\sin A = \frac{p\sin\zeta}{\sqrt{1+p^2\sin^2\zeta}}$.

Maintenant les formules (14) deviennent, en y mettant pour θ et $\cos A$ leurs valeurs,

$$\begin{aligned}
x - x_0 &= \int \rho\sin\zeta\cos(\theta_0 + p\zeta)\sqrt{1+p^2\sin^2\zeta}\,d\zeta,\\
y - y_0 &= \int \rho\sin\zeta\sin(\theta_0 + p\zeta)\sqrt{1+p^2\sin^2\zeta}\,d\zeta,\\
z - z_0 &= \int \rho\cos\zeta\sqrt{1+p^2\sin^2\zeta}\,d\zeta.
\end{aligned}$$

La quantité ρ restant une fonction indéterminée de ζ, il est permis de poser $\rho = k\cos A$, k étant une constante particulière, ou bien

$$\rho = \frac{k}{\sqrt{1+p^2\sin^2\zeta}},$$

d'où

$$p^2\cos^2\zeta = 1 + p^2 - \frac{k^2}{\rho^2};$$

l'expression de $\frac{\rho}{r}$ devient

$$\frac{\rho}{r} = \left(1 - \frac{\rho^2}{k^2}\right)\sqrt{(1+p^2)\frac{\rho^2}{k^2} - 1}.$$

Telle est, dans ce cas, la relation qui lie ρ et r. On remarquera que ρ est compris entre k et $\frac{k}{\sqrt{1-p^2}}$; en outre, r ne devenant infini que pour la valeur $\rho = \frac{k}{\sqrt{1-p^2}}$, on en conclut que la courbe est nécessairement à double courbure. En mettant pour ρ sa valeur en fonction de ζ, on obtient

$$\begin{aligned} x - x_0 &= k \int \sin\zeta \cos(\zeta_0 - p\zeta)\, d\zeta, \\ y - y_0 &= k \int \sin\zeta \sin(\zeta_0 - p\zeta)\, d\zeta, \\ z - z_0 &= -k \sin\zeta, \end{aligned}$$

et, en effectuant les intégrations,

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -\frac{k}{2(1+p)} \cos[(1+p)\zeta - \zeta_0] - \frac{k}{2(1-p)} \cos[(1-p)\zeta + \zeta_0], \\ y - y_0 &= -\frac{k}{2(1+p)} \sin[(1+p)\zeta - \zeta_0] + \frac{k}{2(1-p)} \sin[(1-p)\zeta + \zeta_0], \\ z - z_0 &= -k \sin\zeta. \end{aligned}$$

On voit d'abord que les valeurs de $x - x_0$ et $y - y_0$ ne changent pas quand on change p en $-p$, pourvu qu'on change en même temps ζ en $-\zeta$, ce qui est permis, puisque ζ sert d'indéterminée; mais $z - z_0$ change de signe sans changer de valeur numérique. Donc la courbe répondant à une même valeur de p, prise avec le double signe $\pm$, est symétrique par rapport au plan mené par le point (x_0, y_0, z_0) parallèlement au plan xy. Des formules précédentes on déduit

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{k^2}{4(1+p)^2} + \frac{k^2}{4(1-p)^2} + \frac{k^2}{2(1-p^2)} \cos 2\zeta,$$

ou bien, en remplaçant $\cos 2\zeta$ par $1 - 2\sin^2\zeta = 1 - \frac{2}{k^2}(z - z_0)^2$,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = -\frac{(z - z_0)^2}{1 - p^2} + \frac{k^2}{(1 - p^2)^2};$$

ce qui montre que la courbe qui répond à la question est située sur un ellipsoïde de révolution ou sur un hyperboloïde de révolution à une

nappe, suivant que p est moindre ou plus grand que l'unité. Cette surface a d'ailleurs pour centre le point (x_0, y_0, z_0), et son axe est parallèle à l'axe des z.

Quant à l'arc s de la courbe, il est déterminé par la formule (8), qui donne $1 = -k\frac{d\zeta}{ds}$. On en déduit, en remplaçant $d\zeta$ par sa valeur en fonction de z et dz,

$$ds = \frac{k\,dz}{\sqrt{k^2 - (z - z_0)^2}},$$

puis, en intégrant et supposant que l'arc s commence au point pour lequel $z = z_0$,

$$s = k \arcsin \frac{z - z_0}{k}.$$

On voit donc que l'arc indéfini s s'exprime exactement au moyen d'un arc de cercle.

Transportons l'origine des coordonnées au point (x_0, y_0, z_0), et, pour ne pas changer les notations, continuons à désigner par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de la courbe; si nous prenons en outre pour nouveau plan des xz le plan passant par l'axe des z et faisant avec l'ancien un angle égal à θ_0, ce qui revient à faire $\theta_0 = 0$, les trois équations qui déterminent ces coordonnées deviennent

$$\begin{aligned} x &= \frac{k}{2(1-p)} \cos(1+p)\zeta + \frac{k}{2(1+p)} \cos(1-p)\zeta, \\ y &= \frac{k}{2(1-p)} \sin(1+p)\zeta - \frac{k}{2(1+p)} \sin(1-p)\zeta, \\ z &= -k \sin\zeta. \end{aligned}$$

Admettons que p soit positif, et soit d'abord $p < 1$. Posons

$$\frac{k}{2(1-p)} = R - R', \quad \frac{k}{2(1+p)} = R', \quad (1-p)\zeta = \varphi,$$

d'où l'on déduit

$$R = \frac{k}{1-p^2}, \quad \frac{R - R'}{R'} = \frac{1+p}{1-p}, \quad \frac{R}{R'} = \frac{2}{1-p},$$

$$(1+p)\zeta = \frac{1+p}{1-p}\varphi = \frac{R - R'}{R'}\varphi.$$

Les expressions de x et y se présentent sous cette forme

$$x = (R - R')\cos\varphi + R'\cos\frac{R - R'}{R'}\varphi,$$

$$y = (R - R')\sin\varphi - R'\sin\frac{R - R'}{R'}\varphi,$$

et l'on reconnaît que la projection de la courbe sur le plan xy ou sur le plan du plus grand parallèle de l'ellipsoïde de révolution qui la contient est une épicycloïde intérieure engendrée par un point d'une circonférence mobile de rayon R′ qui roulerait sur une circonférence fixe de rayon R. Ce cercle fixe n'est autre chose que le plus grand parallèle, en vertu de la formule $R = \frac{h}{1 - p^2}$, et l'angle φ est l'angle que fait la ligne des centres des deux cercles avec l'axe des x. Appelons ψ l'angle que fait la même ligne des centres avec le rayon du cercle mobile aboutissant au point générateur de l'épicycloïde : on a évidemment $\varphi + \psi = \frac{R}{R'}\varphi = \frac{2\varphi}{1 - p}$; et, en mettant pour φ sa valeur en fonction de ζ, on obtient cette relation très-simple $\psi = 2\zeta$.

On remarquera que, si $p = 0$, on a $\frac{R}{R'} = 2$ et $y = 0$; l'ellipsoïde se change en une sphère, et la courbe devient un grand cercle de cette sphère.

Lorsque $p = \frac{1}{2}$, on a $\frac{R}{R'} = 4$, et l'épicycloïde, projection de la courbe sur le plan xy, a pour équation $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$, R étant alors égal à $\frac{4}{3}h$.

Quelle que soit la valeur de p, si elle est commensurable, celle du rapport $\frac{R}{R'}$ l'est aussi, et l'épicycloïde est une courbe algébrique qui revient à son point de départ après s'être reproduite un certain nombre de fois. La courbe elle-même qui répond à la question est une courbe algébrique; et, comme sa projection sur le plan xy ne change pas si p est remplacé par $-p$ et ζ par $-\zeta$, on voit que cette courbe se compose d'un nombre limité de courbes identiques, entièrement fermées et situées sur un même ellipsoïde de révolution. Ces courbes identiques se réunissent deux à deux par une série de points de rebroussement situés sur le plus grand parallèle de l'ellipsoïde; la lon-

gueur de chacune d'elles se trouve être indépendante de la valeur de p et égale à la circonférence de rayon k, car elle est visiblement égale à $4\int_0^{\frac{\pi}{2}} k\,d\zeta = 2\pi k$.

Soit, en second lieu, $k>1$. On changera k en $-k$ dans les formules qui donnent x, y, z en fonction de ζ, ce qui est permis, puisque cela revient à changer le sens dans lequel on compte les coordonnées positives; on aura

$$x = \frac{k}{2(p-1)}\cos(1-p)\zeta + \frac{k}{2(1+p)}\cos(1+p)\zeta,$$

$$y = \frac{k}{2(p-1)}\sin(1-p)\zeta - \frac{k}{2(1+p)}\sin(1+p)\zeta,$$

$$z = k\sin\zeta.$$

On posera ensuite $\frac{k}{2(p-1)} = R + R'$, $\frac{k}{2(p+1)} = R'$, $(1-p)\zeta = \varphi$, d'où l'on déduit

$$R = \frac{k}{p^2-1}, \quad \frac{R+R'}{R'} = \frac{p+1}{p-1}, \quad \frac{R}{R'} = \frac{2}{p-1},$$

$$(1+p)\zeta = -\frac{p+1}{p-1}\varphi = -\frac{R+R'}{R'}\varphi.$$

Les expressions de x et y deviennent

$$x = (R+R')\cos\varphi - R'\cos\frac{R+R'}{R'}\varphi,$$

$$y = (R+R')\sin\varphi - R'\sin\frac{R+R'}{R'}\varphi,$$

ce qui montre que la projection de la courbe sur le plan xy est une épicycloïde extérieure engendrée par un point d'une circonférence de rayon R' qui roulerait sur une circonférence fixe de rayon R. On trouvera d'ailleurs $\psi = \frac{R}{R'}\varphi = \frac{2\varphi}{p-1} = -2\zeta$; la courbe est encore algébrique si p est commensurable.

On remarquera que, dans la même hypothèse, l'indicatrice sphérique de cette courbe est une courbe algébrique dont l'arc indéfini

s'exprime par une fonction elliptique de deuxième espèce. Désignons, en effet, par x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de cette indicatrice, et par σ son arc, compté à partir d'une origine arbitraire; on a évidemment

$$x' = \cos\theta \sin\zeta, \quad y' = \sin\theta \sin\zeta, \quad z' = \cos\zeta,$$

et l'on en déduit

$$d\sigma^2 = d\zeta^2 + \sin^2\zeta \, d\theta^2.$$

Mais on a aussi $\theta = \theta_0 - p\zeta$, qui est l'équation en coordonnées polaires sphériques de cette courbe, ou plus simplement $\theta = -p\zeta = -\frac{m}{n}\zeta$, en posant $p = \frac{m}{n}$ et admettant que θ s'annule en même temps que ζ. Il vient donc

$$x' = \cos\frac{m}{n}\zeta \sin\zeta, \quad y' = -\sin\frac{m}{n}\zeta \sin\zeta, \quad z' = \cos\zeta,$$

équations qui déterminent une courbe algébrique. On a en outre

$$d\theta = -\frac{m}{n} d\zeta,$$

par suite

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{m^2}{n^2}\sin^2\zeta} \, d\zeta = \sqrt{1 + \frac{m^2}{n^2}} \sqrt{1 - \frac{m^2}{m^2 + n^2}\cos^2\zeta} \, d\zeta,$$

d'où, en faisant $\zeta = \frac{\pi}{2} + \xi$ et supposant que l'arc σ commence au point pour lequel $\zeta = \frac{\pi}{2}$ ou $\xi = 0$,

$$\sigma = \sqrt{1 + \frac{m^2}{n^2}} \int_0^{\xi} \sqrt{1 - \frac{m^2}{m^2 + n^2}\sin^2\xi} \, d\xi;$$

ce qui fait voir que l'arc σ s'exprime par une fonction elliptique de deuxième espèce dont le module est $\frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}$ ou $\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$. Réciproquement, toute fonction elliptique de deuxième espèce dont le module sera de la forme $\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$, p étant un nombre commensurable quel-

conque, pourra être représentée par l'arc d'une des courbes algébriques dont il s'agit. L'équation $\zeta = p\zeta$ montre d'ailleurs que ces courbes sont telles que le rayon vecteur ζ de chacun de leurs points est proportionnel à l'angle polaire correspondant θ.

10. Nous signalerons, à cette occasion, une autre courbe algébrique à double courbure, dont l'arc indéfini s'exprime par la fonction elliptique de deuxième espèce. Prenons les trois équations

$$dx = k\cos p\zeta \sin\zeta\, d\zeta,\quad dy = k\sin p\zeta \sin\zeta\, d\zeta,\quad dz = h\cos\zeta\, d\zeta,$$

où h et k désignent deux constantes quelconques, et p un nombre commensurable. En intégrant il vient

$$\frac{x}{k} = \frac{1}{2(p-1)}\cos(p-1)\zeta - \frac{1}{2(p+1)}\cos(p+1)\zeta,$$

$$\frac{y}{k} = \frac{1}{2(p-1)}\sin(p-1)\zeta - \frac{1}{2(p+1)}\sin(p+1)\zeta,$$

$$\frac{z}{h} = \sin\zeta,$$

formules qui déterminent une courbe algébrique dont les divers points répondent aux valeurs attribuées à la variable indépendante ζ. On en déduit

$$\left(\frac{x}{k}\right)^2 + \left(\frac{y}{k}\right)^2 = \frac{1}{4(p-1)^2} + \frac{1}{4(p+1)^2} - \frac{1}{2(p^2-1)}\cos 2\zeta,$$

ou bien, en remplaçant $\cos 2\zeta$ par $1 - 2\sin^2\zeta = 1 - 2\left(\frac{z}{h}\right)^2$,

$$\left(\frac{x}{k}\right)^2 + \left(\frac{y}{k}\right)^2 + \frac{1}{1-p^2}\left(\frac{z}{h}\right)^2 = \frac{1}{(1-p^2)^2},$$

équation d'un ellipsoïde de révolution ou d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, selon que p est moindre ou plus grand que l'unité. La courbe est donc située sur l'une ou l'autre de ces surfaces. Or on trouve pour l'expression de ds^2

$$ds^2 = (k^2\sin^2\zeta + h^2\cos^2\zeta)\,d\zeta^2 = h^2\left(1 - \frac{h^2-k^2}{h^2}\sin^2\zeta\right)d\zeta^2;$$

par suite

$$s = h \int_0^\zeta \sqrt{1 - \frac{h^2 - k^2}{h^2} \sin^2 \zeta}\, d\zeta ;$$

ce qui montre que, si $\frac{k}{h} < 1$, l'arc indéfini de la courbe s'exprime par une fonction elliptique de deuxième espèce, ayant pour module $\sqrt{1 - \frac{k^2}{h^2}}$.

11. Un second cas à examiner est celui où l'on poserait

$$\frac{\rho}{r} = \frac{\cos 2\zeta}{a \sin \zeta},$$

a étant une constante donnée. On a alors $\int \frac{\rho}{r} \sin \zeta \, d\zeta = \frac{1}{2a} \sin 2\zeta + C$, par suite

$$\sin A = \frac{1}{\sin \zeta} \left(\frac{1}{2a} \sin 2\zeta + C \right).$$

En faisant $C = 0$, on a simplement

$$\sin A = \frac{1}{a} \cos \zeta, \quad \text{d'où} \quad \tang A = \frac{\cos \zeta}{\sqrt{a^2 - \cos^2 \zeta}}.$$

La formule (13) devient

$$\theta - \theta_0 = - \int \frac{\cos \zeta \, d\zeta}{\sin \zeta \sqrt{a^2 - \cos^2 \zeta}}$$

$$= - \int_0^\zeta \frac{\frac{\cos \zeta \, d\zeta}{\sin^2 \zeta}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{1 - a^2}}{\sin \zeta} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} \text{arc sin} \frac{\sqrt{1 - a^2}}{\sin \zeta},$$

et l'on en déduit, en faisant $\theta_0 = 0$, admettant que a soit moindre que l'unité, et posant $\sqrt{1 - a^2} = a'$,

$$a'\theta = \text{arc sin} \frac{a'}{\sin \zeta},$$

ou bien

$$\sin \zeta = \frac{a'}{\sin a'\theta}.$$

Cette expression de $\sin\zeta$ conduit aux suivantes :

$$\cos\zeta = \frac{\sqrt{\sin^2 a'\theta - a'^2}}{\sin a'\theta}, \quad \cos\lambda = \frac{a'\cos a'\theta}{\cos\zeta \sin a'\theta}, \quad d\zeta = -\frac{a'^2\cos a'\theta\, d\theta}{\sin a'\theta\sqrt{\sin^2 a'\theta - a'^2}},$$

et, en les substituant dans les équations (14), on obtient

$$x - x_0 = aa'^2\int\frac{\rho\cos\theta\, d\theta}{\sin a'\theta\sqrt{\sin^2 a'\theta - a'^2}},$$

$$y - y_0 = aa'^2\int\frac{\rho\sin\theta\, d\theta}{\sin a'\theta\sqrt{\sin^2 a'\theta - a'^2}},$$

$$z - z_0 = aa'\int\frac{\rho\, d\theta}{\sin a'\theta}.$$

Ce sont là les formules qui détermineront la courbe cherchée, après y avoir remplacé ρ par une fonction de θ qu'on se donnera à volonté. Mais ce que nous voulons surtout faire remarquer, c'est que, lorsque a' est une fraction commensurable, l'indicatrice sphérique, dont l'équation est $\sin\zeta = \frac{a'}{\sin a'\theta}$, est une courbe algébrique dont l'arc indéfini s'exprime par la fonction elliptique de première espèce.

Chaque point M de cette indicatrice se trouve déterminé, sur la sphère qui la contient, par son rayon vecteur ζ et son angle polaire θ. Or, pour $\theta = 1$, le rapport $\frac{a'}{\sin a'\theta}$ devient $\frac{a'}{\sin a'}$, quantité plus grande que l'unité; et pour $\theta = \frac{\pi}{2a'}$, il est égal à a' qui est moindre que l'unité. Donc il existe une valeur de θ comprise entre 1 et $\frac{\pi}{2a'}$ et que je nomme θ_1, pour laquelle ce rapport sera égal à l'unité, et puisque $\sin\zeta = \frac{a'}{\sin a'\theta}$, on doit rejeter les valeurs de θ comprises entre zéro et θ_1, mais admettre celles comprises entre θ_1 et $\frac{\pi}{2a'}$. A chacune de ces dernières valeurs de θ répondront deux valeurs de ζ supplémentaires, et par conséquent deux points de l'indicatrice, ce qui montre que cette courbe est symétrique par rapport au grand cercle perpendiculaire à l'axe des z. Soit ζ_0 un arc moindre que $\frac{\pi}{2}$ et tel qu'on ait $\sin\zeta_0 = a'$: aux valeurs de θ

comprises entre θ_1 et $\frac{\pi}{2a'}$ correspondront des valeurs de ζ comprises entre $\frac{\pi}{2}$ et ζ_0, ou bien entre $\frac{\pi}{2}$ et $\pi - \zeta_0$. Quant aux valeurs de θ comprises entre $\frac{\pi}{2a'}$ et $\frac{\pi}{a'} - \theta_1$, elles redonneront les mêmes valeurs de ζ et comme ζ a la même valeur pour $\theta = \frac{\pi}{2a'} - \lambda$ et $\theta = \frac{\pi}{2a'} + \lambda$, il s'ensuit que l'indicatrice est symétrique par rapport au grand cercle passant par l'axe des z, que détermine la valeur $\theta = \frac{\pi}{2a'}$. Cette courbe est entièrement fermée, et elle coupe le grand cercle perpendiculaire à l'axe des z en deux points déterminés par les valeurs $\theta = \theta_1$, $\theta = \frac{\pi}{a'} - \theta_1$; il est d'ailleurs facile de reconnaître que les tangentes en ces deux points sont perpendiculaires au plan de ce cercle, et qu'aux deux points répondant aux valeurs $\zeta = \zeta_1$, $\zeta = \pi - \zeta_1$ les tangentes sont parallèles à ce même plan. On verrait encore que les valeurs de θ supérieures à $\frac{\pi}{a'} - \theta_1$ donneraient une série de courbes égales à la première, mais situées différemment sur la sphère qui les contient; le nombre de ces courbes serait limité si a' était commensurable.

Désignons par $d\sigma$ l'élément de l'indicatrice : en différentiant l'équation de cette courbe, on obtient

$$d\theta = \frac{\cos\zeta\, d\zeta}{\sin\zeta\sqrt{\sin^2\zeta - a^2}},$$

valeur qui, substituée dans la formule

$$d\sigma = \sqrt{d\zeta^2 + \sin^2\zeta\, d\theta^2},$$

donne

$$d\sigma = \frac{a\, d\zeta}{\sqrt{\sin^2\zeta - a^2}}.$$

Transformons cette expression de $d\sigma$ en posant

$$\sin\zeta = \frac{a'}{\sqrt{\cos^2\varphi + a'^2\sin^2\varphi}}$$

et remarquons que l'on a : 1° $\varphi = 0$ pour la valeur $\zeta = \zeta_0$ qui rend $\sin\zeta$ égal à a' ; 2° $\varphi = \frac{\pi}{2}$ pour $\zeta = \frac{\pi}{2}$; en sorte que, si ζ varie de ζ_0 à $\frac{\pi}{2}$, φ variera de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

On trouve

$$\cos\zeta = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + a'^2\sin^2\varphi}}, \quad \sqrt{\sin^2\zeta - a'^2} = \frac{aa'\sin\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + a'^2\sin^2\varphi}},$$

$$\cos\zeta\, d\zeta = \frac{a^2 a'\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{(\cos^2\varphi + a'^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}, \quad d\zeta = \frac{aa'\sin\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi + a'^2\sin^2\varphi};$$

par suite on a, pour la transformée de $d\sigma$,

$$d\sigma = \frac{a\, d\varphi}{\sqrt{1 - a^2\sin^2\varphi}}.$$

Il vient donc, en supposant que l'arc σ soit compté à partir du point pour lequel $\varphi = 0$,

$$\sigma = a\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - a^2\sin^2\varphi}};$$

ce qui montre que la valeur de σ, au facteur a près, est égale à une fonction elliptique de première espèce, dont le module est cette même quantité a. Si l'on se donne réciproquement une fonction elliptique de première espèce $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - a^2\sin^2\varphi}}$, on pourra la représenter par l'arc d'une des courbes algébriques que nous considérons, pourvu que le complément du module a soit une fraction rationnelle $\frac{p}{q}$, ou que ce module soit de la forme $\sqrt{1 - \frac{p^2}{q^2}}$.

Pour démontrer que, dans ce cas, les courbes sont algébriques, posons $\frac{p\theta}{q} = \theta'$. L'équation d'une quelconque de ces courbes devient

$$\sin\theta' = \frac{a'}{\sin\zeta}, \quad \text{d'où} \quad \cos\theta' = \frac{\sqrt{\sin^2\zeta - a'^2}}{\sin\zeta}.$$

Or la relation $\frac{p\theta}{q} = \theta'$ donne

$$\operatorname{tang} p\theta = \operatorname{tang} q\theta';$$

et, comme p et q sont des entiers positifs, si l'on exprime $\operatorname{tang} p\theta$ et $\operatorname{tang} q\theta'$ en fonction rationnelle de $\operatorname{tang}\theta$, $\operatorname{tang}\theta'$, on obtient l'équation

$$\frac{p\operatorname{tang}\theta - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\operatorname{tang}^3\theta + \ldots}{1 - \frac{p(p-1)}{1.2}\operatorname{tang}^2\theta + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4}\operatorname{tang}^4\theta - \ldots} = \frac{q\operatorname{tang}\theta' - \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\operatorname{tang}^3\theta' + \ldots}{1 - \frac{q(q-1)}{1.2}\operatorname{tang}^2\theta' + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{1.2.3.4}\operatorname{tang}^4\theta' - \ldots}$$

où les numérateurs et les dénominateurs des deux membres sont composés d'un nombre fini de termes. Appelons x', y', z' les coordonnées rectilignes d'un point quelconque de la courbe, il vient

$$x' = \cos\theta\sin\zeta, \quad y' = \sin\theta\sin\zeta, \quad z' = \cos\zeta,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{y'}{x'}, \quad \sin\zeta = \sqrt{1-z'^2},$$

$$\sin\theta' = \frac{a'}{\sqrt{1-z'^2}}, \quad \cos\theta' = \sqrt{\frac{1-a'^2-z'^2}{1-z'^2}}, \quad \operatorname{tang}\theta' = \frac{a'}{\sqrt{1-a'^2-z'^2}}.$$

En remplaçant $\operatorname{tang}\theta$ et $\operatorname{tang}\theta'$ par leurs valeurs en fonction de x', y', z' dans la relation qui lie entre elles ces deux quantités, et remarquant que $a'q = p$, on obtient l'équation

[illegible]

En y joignant l'équation $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$, c'est-à-dire celle de la sphère sur laquelle la courbe est située, on reconnaît que cette courbe est algébrique, puisqu'elle est représentée par ces deux équations.

10. Supposons enfin que l'on ait $\frac{\rho}{r} = k$, k étant une constante quelconque.

On sait que, dans ce cas, la courbe est une hélice, ainsi que l'a démontré, le premier, M. Bertrand à l'aide d'ingénieuses considérations géométriques (*Journal de Mathématiques*, Ire série, t. XIII, p. 423), et l'on connaît aussi les démonstrations analytiques qu'en ont données ensuite MM. Serret et Puiseux (*Journal de Mathématiques*, Ire série, t. XVI, p. 193 et 208). Or on peut arriver promptement au même résultat au moyen des formules (10), (11) et (12), auxquelles on joindra la suivante :

$$(15) \qquad \frac{d\cos A}{d\zeta} = -\operatorname{tang} A \frac{d\sin A}{d\zeta} = -\operatorname{tang} A \left(\frac{\rho}{r} - \sin A \cot\zeta\right),$$

qu'on déduit de l'expression de $\frac{d\sin A}{d\zeta}$ donnée par l'équation (10) ; et l'on obtiendra, en outre, les coordonnées d'un point quelconque de la courbe en fonction de ζ par de simples quadratures.

D'abord $\frac{\rho}{r}$ étant constant, l'équation (11) donne

$$(16) \qquad \frac{\rho}{r}\cos\zeta + \sin A \sin\zeta = C.$$

En second lieu, considérons les deux quantités

$$\cos\theta\left(\frac{\rho}{r}\sin\zeta - \cos\zeta\sin A\right) + \sin\theta\cos A,$$

$$\sin\theta\left(\frac{\rho}{r}\sin\zeta - \cos\zeta\sin A\right) - \cos\theta\cos A.$$

Il est aisé de reconnaître que leurs dérivées par rapport à ζ sont nulles. En effet : 1° si l'on prend la dérivée de la première quantité, en mettant pour $\frac{d\sin A}{d\zeta}$, $\frac{d\cos A}{d\zeta}$, $\frac{d\theta}{d\zeta}$ leurs valeurs déterminées par les formules (10), (15) et (12), savoir :

$$\frac{d\sin A}{d\zeta} = \frac{\rho}{r} - \sin A\cot\zeta, \qquad \frac{d\cos A}{d\zeta} = -\operatorname{tang} A\left(\frac{\rho}{r} - \sin A\cot\zeta\right),$$

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \frac{\operatorname{tang} A}{\sin\zeta},$$

on trouve pour cette dérivée

$$\frac{\sin\theta\,\mathrm{tang}\,A}{\sin\zeta}\left(\frac{\rho}{r}\sin\zeta - \cos\zeta\sin A\right)$$
$$-\cos\theta\left[\frac{\rho}{r}\cos\zeta + \sin\zeta\sin A - \cos\zeta\left(\frac{\rho}{r} - \sin A\cot\zeta\right)\right]$$
$$-\sin\theta\,\mathrm{tang}\,A\left(\frac{\rho}{r} - \sin A\cot\zeta\right) - \frac{\cos\theta\sin A}{\sin\zeta},$$

2° on trouve de même pour la dérivée de la deuxième quantité

$$\frac{\cos\theta\,\mathrm{tang}\,A}{\sin\zeta}\left(\frac{\rho}{r}\sin\zeta - \cos\zeta\sin A\right)$$
$$+\sin\theta\left[\frac{\rho}{r}\cos\zeta + \sin\zeta\sin A - \cos\zeta\left(\frac{\rho}{r} - \sin A\cot\zeta\right)\right]$$
$$-\cos\theta\,\mathrm{tang}\,A\left(\frac{\rho}{r} - \sin A\cot\zeta\right) + \frac{\sin\theta\sin A}{\sin\zeta},$$

et l'on vérifie que, dans ces deux résultats, les termes se détruisent mutuellement. Il vient donc, en désignant par C′ et C″ deux nouvelles constantes,

$$\cos\theta\left(\frac{\rho}{r}\sin\zeta - \cos\zeta\sin A\right) + \sin\theta\cos A = C', \tag{17}$$

$$\sin\theta\left(\frac{\rho}{r}\sin\zeta - \cos\zeta\sin A\right) - \cos\theta\cos A = C''. \tag{18}$$

On remarquera d'ailleurs que, si l'on ajoute les trois équations (16), (17) et (18), après les avoir élevées au carré, on obtient

$$C^2 + C'^2 + C''^2 = 1 + \frac{\rho^2}{r^2}, \tag{19}$$

ce qui montre que, des trois constantes C, C′, C″, deux seulement restent arbitraires.

Cela posé, on a, en désignant par α, β, γ les angles que fait la tangente de la courbe avec les axes coordonnés,

$$\cos\alpha = \cos\theta\sin\zeta,\quad \cos\beta = \sin\theta\sin\zeta,\quad \cos\gamma = \cos\zeta$$

Si l'on multiplie les premiers membres des équations (16), (17) et (18) respectivement par $\cos\zeta$, $\cos\theta\sin\zeta$, $\sin\theta\sin\zeta$, et qu'on ajoute les produits, on trouve pour somme $\frac{\rho}{r}$. Donc on a aussi

$$C'\cos\alpha + C''\cos\beta + C\cos\gamma = \frac{\rho}{r},$$

ou bien, en posant $\cos\alpha' = \frac{C'}{\sqrt{C^2 + C'^2 + C''^2}}$, $\cos\beta' = \frac{C''}{\sqrt{C^2 + C'^2 + C''^2}}$, $\cos\gamma' = \frac{C}{\sqrt{C^2 + C'^2 + C''^2}}$, et ayant égard à la formule (19),

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = \frac{\frac{\rho}{r}}{\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{r^2}}},$$

ce qui prouve que la tangente de la courbe fait un angle constant avec la direction déterminée par les trois angles α', β', γ', c'est-à-dire que cette courbe est une hélice qui coupe, sous un angle constant, les génératrices d'un cylindre parallèle à cette même direction.

Réciproquement, si la courbe est une hélice, le rapport $\frac{\rho}{r}$ est constant; car, si l'on prend l'axe des z parallèle aux génératrices du cylindre sur lequel l'hélice est tracée, l'angle ζ sera constant, et l'on aura $d\zeta = 0$; par suite $\frac{\rho}{r}$ sera aussi constant, puisque l'équation (7) devient $\frac{\rho}{r} = \cot\zeta$.

Cherchons maintenant les équations de la courbe dans l'hypothèse d'axes rectangulaires quelconques. Si l'on multiplie l'équation (17) par $\cos\theta$ et l'équation (18) par $\sin\theta$, puis qu'on ajoute les produits, on obtient

$$C''\cos\theta - C'\sin\theta = \frac{\rho}{r}\sin\zeta - \cos\zeta\sin A,$$

ou bien, en mettant pour $\sin A$ sa valeur donnée par la formule (11),

$$C''\cos\theta - C'\sin\theta = \frac{1}{\sin\zeta}\left(\frac{\rho}{r} - C\cos\zeta\right).$$

équation qui détermine l'angle θ en fonction de ζ. Mais il vaut mieux se servir des expressions suivantes, tirées des mêmes équations (17) et (18),

$$\cos\theta = \frac{C'\left(\frac{\rho}{r}\sin\zeta - \cos\zeta\sin A\right) + C''\cos A}{\left(\frac{\rho}{r}\sin\zeta - \cos\zeta\sin A\right)^2 + \cos^2 A},$$

$$\sin\theta = \frac{C'\cos A - C''\left(\frac{\rho}{r}\sin\zeta - \cos\zeta\sin A\right)}{\left(\frac{\rho}{r}\sin\zeta - \cos\zeta\sin A\right)^2 + \cos^2 A}.$$

Si l'on met pour $\sin A$ et $\cos A$ leurs valeurs, on trouve, pour le dénominateur commun,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\rho}{r}\sin\zeta - \cos\zeta\sin A\right)^2 + \cos^2 A \\
&= \frac{1}{\sin^2\zeta}\left[\left(\frac{\rho}{r} - C\cos\zeta\right)^2 + \sin^2\zeta - \left(C - \frac{\rho}{r}\cos\zeta\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{\sin^2\zeta}\left(\frac{\rho^2}{r^2}\sin^2\zeta - C^2\sin^2\zeta + \sin^2\zeta\right) \\
&= 1 + \frac{\rho^2}{r^2} - C^2 \\
&= C'^2 + C''^2;
\end{aligned}$$

par suite,

$$\cos\theta\sin\zeta = \frac{C'\left(\frac{\rho}{r} - C\cos\zeta\right) + C''\sqrt{\sin^2\zeta - \left(C - \frac{\rho}{r}\cos\zeta\right)^2}}{C'^2 + C''^2},$$

$$\sin\theta\sin\zeta = \frac{C''\left(\frac{\rho}{r} - C\cos\zeta\right) - C'\sqrt{\sin^2\zeta - \left(C - \frac{\rho}{r}\cos\zeta\right)^2}}{C'^2 + C''^2}.$$

Il ne reste plus qu'à porter dans les équations (14) les valeurs de

$\cos\lambda$, $\cos\theta\sin\zeta$, $\sin\theta\sin\zeta$, ce qui donne

$$(20)\quad\begin{cases} x - x_0 = -\dfrac{1}{C'^2 + C''^2}\displaystyle\int\left[\dfrac{C''\left(\frac{\rho}{r} - C\cos\zeta\right)}{\sqrt{\sin^2\zeta - \left(C - \frac{\rho}{r}\cos\zeta\right)^2}} - C'\right]\rho\sin\zeta\,d\zeta,\\[2ex] y - y_0 = -\dfrac{1}{C'^2 + C''^2}\displaystyle\int\left[\dfrac{C'\left(\frac{\rho}{r} - C\cos\zeta\right)}{\sqrt{\sin^2\zeta - \left(C - \frac{\rho}{r}\cos\zeta\right)^2}} + C''\right]\rho\sin\zeta\,d\zeta,\\[2ex] z - z_0 = -\displaystyle\int\dfrac{\rho\sin\zeta\cos\zeta\,d\zeta}{\sqrt{\sin^2\zeta - \left(C - \frac{\rho}{r}\cos\zeta\right)^2}}.\end{cases}$$

Dans ces formules, $\frac{\rho}{r}$ devra être remplacé par k, et ρ par sa valeur en fonction de ζ, qui est censée connue. Elles donnent les valeurs de x, y, z en fonction de ζ, en supposant qu'on ait déterminé les intégrales qui y sont contenues; par où l'on voit que la détermination des équations de la courbe cherchée est ramenée à ne dépendre que de simples quadratures.

Supposons ρ constant, ce qui exige que r le soit aussi, puisque $\frac{\rho}{r} = k$. Prenons pour axe des x une parallèle aux génératrices du cylindre sur lequel l'hélice est tracée : on aura

$$\cos\alpha' = 1,\quad \cos\beta' = 0,\quad \cos\gamma' = 0,$$

par suite,

$$C' = \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{r^2}},\quad C'' = 0,\quad C = 0.$$

Les expressions de $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ deviennent

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -\frac{\rho^2}{C'r}\int\frac{\sin\zeta\,d\zeta}{\sqrt{1 - C'^2\cos^2\zeta}} = \frac{\rho^2}{C'^2 r}\arcsin(C'\cos\zeta),\\ y - y_0 &= \frac{\rho}{C'}\cos\zeta,\\ z - z_0 &= -\rho\int\frac{\sin\zeta\cos\zeta\,d\zeta}{\sqrt{1 - C'^2\cos^2\zeta}} = -\frac{\rho}{C'^2}\sqrt{1 - C'^2\cos^2\zeta}; \end{aligned}$$

et, en faisant la somme des carrés des deux dernières formules, on obtient

$$(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \frac{\rho^2}{C^2},$$

ce qui démontre que le cylindre dont les génératrices sont coupées par l'hélice sous un angle constant est un cylindre de révolution dont le rayon de la base est $\frac{\rho}{C}$ ou [illegible]. C'est M. Puiseux qui, le premier, a traité le cas où les rayons des deux courbures sont constants, et a fait voir que la courbe est une hélice tracée sur un cylindre de révolution (*Journal de Mathématiques*, Ire série, t. VII, p. 65).

On remarquera encore le cas particulier où $r = \infty$, ρ étant une fonction quelconque de ζ. On a alors $\frac{\rho}{r} = 0$, $C^2 + C'^2 + C''^2 = 1$, et les formules (20) deviennent

$$x - x_0 = \frac{CC'}{C'^2 + C''^2} \int_0^s \frac{\rho \cos\zeta \sin\zeta \, d\zeta}{\sqrt{\sin^2\zeta - C^2}} + \frac{C''}{C'^2 + C''^2} \int_0^s \rho \sin\zeta \, d\zeta,$$

$$y - y_0 = \frac{CC''}{C'^2 + C''^2} \int_0^s \frac{\rho \cos\zeta \sin\zeta \, d\zeta}{\sqrt{\sin^2\zeta - C^2}} - \frac{C'}{C'^2 + C''^2} \int_0^s \rho \sin\zeta \, d\zeta,$$

$$z - z_0 = - \int_0^s \frac{\rho \cos\zeta \sin\zeta \, d\zeta}{\sqrt{\sin^2\zeta - C^2}}.$$

Or ces équations, multipliées respectivement par C′, C″, C, et ajoutées ensuite, conduisent à l'équation d'un plan, savoir :

$$C'(x - x_0) + C''(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

On vérifie donc que la courbe est plane lorsque le rayon de torsion est infini.

FIN DU TOME DIX-NEUVIÈME (2e SÉRIE).

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

DEUXIÈME SÉRIE.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES,

PUBLIÉ PAR
M. J. LIOUVILLE,
MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES.

TABLES DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LES DIX-NEUF VOLUMES COMPOSANT LA 2e SÉRIE DE CE JOURNAL,

SUIVIES

D'UNE TABLE GÉNÉRALE PAR NOMS D'AUTEURS.

ANNÉES 1856, 1857, 1858, 1859, 1860, 1861, 1862, 1863, 1864, 1865, 1866, 1867, 1868, 1869, 1870, 1871, 1872, 1873 ET 1874.

TOME Ier. (ANNÉE 1856.)

TOME II. (Année 1857.)

TOME III. (Année 1858.)

TOME IV. (Année 1859.)

TOME V. (Année 1860.)

TOME VI. (Année 1861.)

TOME VII. ANNÉE 1862.

TOME VIII (Année 1863).

TOME IX. (Année 1864.)

TOME X. (Année 1865.)

TOME XI. (Année 1866.)

TOME XII. (Année 1867.)

TOME XIII. (Année 1868.)

TOME XIV. (Année 1869.)

TOME XV. (Année 1870.)

TOME XVI. (Année 1871.)

TOME XVII. (Année 1872.)

TOME XVIII. (Année 1873.)

TOME XIX. (Année 1874.)

TABLE DES MATIÈRES

PAR

NOMS D'AUTEUR.

B

C

D

F

G

H

K

L

M

N

O

P

R

S

T

V

W

Z.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

